गोलीय त्रिकोणमिति

(SPHERICAL TRIGONOMETRY)

डॉ० पी० डी० कठल
(Dr. P. D. Kathal)
सहायक प्राध्यापक
रानी दुर्गावती शासकीय महाविद्यालय, मण्डला, म०प्र०

मध्यप्रदेश हिन्दी ग्रन्थ अकादमी, भोपाल

गोलीय त्रिकोणमिति

SPHERICAL TRIGONOMETRY—by Dr. P. D. Kathal

प्रकाशक :
मध्यप्रदेश हिन्दी ग्रन्थ अकादमी,
मालवीय नगर, भोपाल

प्रथम संस्करण : 1973

मूल्य : 10 रुपये

मुद्रक :
मुकेश जायसवाल, साइंटिफिक प्रिंटर्स
65, राय रामचरन दास रोड, इलाहाबाद-2

Published by Madhya Pradesh Hindi Granth Academy under the Centrally Sponsored Scheme of Production of Books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

प्रस्तावना

'गोलीय त्रिकोणमिति' विश्वविद्यालयों की स्नातक कक्षाओं के लिए नियत पाठ्यक्रम पर आधारित पाठ्य पुस्तक है। पुस्तक दस अध्यायों में विभक्त है, जिनमें ठोस ज्यामिति, गोलीय ज्यामिति, गोलीय त्रिभुज एवं उसकी भुजाओं और कोणों में त्रिकोणमितीय सम्बन्ध, समकोण गोलीय त्रिभुज, गोलीय त्रिभुज का निर्धारण, अन्तर्गत वृत्त और परिवृत्त, गोलीय त्रिभुज का क्षेत्रफल और गोलीय आधिक्य, लघु विचरण एवं गोलीय त्रिकोणमिति के सरल अनुप्रयोगों का प्रतिपादन किया गया है। पारिभाषिक एवं सैद्धान्तिक शब्दों की यथास्थान सरल शब्दों में परिभाषा देते हुए प्रत्येक विषय को विविध-उदाहरणों के साथ स्पष्ट किया गया है। अंकों तथा फार्मूलों के लिए अन्तर्राष्टीय अंकों और चिह्नों का प्रयोग किया गया है। पुस्तक के अन्त में पारिभाषिक शब्दावली भी जोड़ दी गयी है जिससे विद्यार्थियों को विषयवस्तु के अधिगम में सुविधा हो।

डा० कठल को विश्वविद्यालय स्तर पर गणित के अध्यापन का दीर्घकालीन अनुभव है। आशा है उनकी यह पुस्तक विद्यार्थियों में लोकप्रिय होगी।

(डा० प्रभुदयालु अग्निहोत्री)
संचालक
मध्यप्रदेश हिन्दी ग्रन्थ अकादमी

विषय-सूची

अध्याय 1

ठोस ज्यामिति

(SOLID GEOMETRY)

1·1. इस अध्याय में हम ठोस ज्यामिति के कुछ परिणामों का अध्ययन करेंगे जिनका ज्ञान ज्यामिति और गोलीय त्रिकोणमिति के अध्ययन में अत्यन्त आवश्यक है।

सरल रेखा और समतल

परिभाषा 1

जब एक सरल रेखा एक समतल को किसी बिन्दु पर काटती है तो उस सरल रेखा को 'प्रतिच्छेदी रेखा' और उस बिन्दु को प्रतिच्छेदी रेखा का 'पाद' कहते हैं।

परिभाषा 2

जब प्रतिच्छेदी रेखा से होकर जाने वाली, समतल में स्थित, प्रत्येक रेखा, प्रतिच्छेदी रेखा के लम्बरूप हो तो ऐसी प्रतिच्छेदी रेखा समतल पर लम्ब कहलाती है।

परिभाषा 3

जब प्रतिच्छेदी रेखा समतल पर लम्ब हो तो उसका प्रतिच्छेद बिन्दु 'लम्बपाद' कहलाता है।

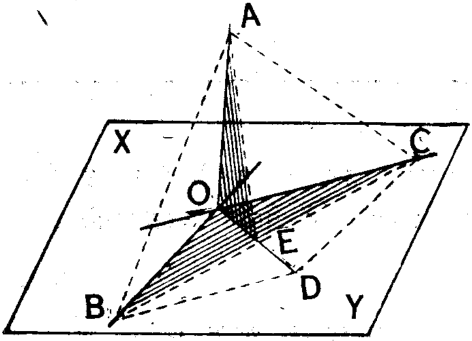
1·1.1 प्रमेय 1

यदि एक सरल रेखा, किन्हीं दो प्रतिच्छेदी सरल रेखाओं के कटन बिन्दु पर, उनमें से प्रत्येक रेखा पर लम्ब हो तो वह उस समतल पर भी लम्ब होगी जो उन प्रतिच्छेदी रेखाओं में से होकर जाता है।

[टिप्पणी—प्रमेय की उपपत्ति में निम्नलिखित ज्यामितीय परिणाम का प्रयोग किया गया है जिसकी सत्यता को हम यहाँ प्रामाणिक मान कर चलेंगे।]

त्रिभुज ABC में यदि AC मध्यगत रेखा है तो,

$$AB^2+AC^2=2AE^2+2CE^2$$



आकृति 1

दिया है—सरल रेखा OA, प्रतिच्छेदी रेखाओं OB और OC पर अलग अलग लम्ब है अर्थात,

$$\angle AOC=90^\circ$$

$$\angle AOB=90^\circ$$

और,

सिद्ध करना है। सरल रेखा AO, समतल XY, जो दी हुई प्रतिच्छेदी रेखाओं OB और OC से होकर जाता है, पर लम्ब है।

रचना। O बिन्दु से, समतल XY में, कोई भी एक सरल रेखा OD खींची। बिन्दु D से OB और OC के समान्तर सरल रेखाएँ खींचकर, समान्तर चतुर्भुज $OBDC$ बनाया। मान लो समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण (Diagonals) परस्पर E बिन्दु पर काटते हैं। AB, AE और AC को मिलाया।

उपपत्ति—त्रिभुज ABC और OBC में क्रमशः AE और OE मध्यगत रेखाएँ हैं। (रचना से)

$$\therefore \quad AB^2+AC^2=2AE^2+2CE^2 \quad \ldots\ldots \text{(i)}$$

और $$OB^2+OC^2=2OE^2+2CE^2 \quad \ldots\ldots \text{(ii)}$$

परन्तु त्रिभुज AOB में

$$\angle AOB=90^\circ \qquad \because \text{ दिया है।}$$

$$\therefore \quad AB^2=OA^2+OB^2$$

इसी प्रकार, त्रिभुज AOC में

$$AC^2=OA^2+OC^2$$

$$\therefore \quad AB^2+AC^2=2OA^2+OB^2+OC^2$$

$$=2OA^2+2OE^2+2CE^2 \quad \because \text{(ii)}$$

या, $$2AE^2+2CE^2=2OA^2+2OE^2+2CE^2 \quad \because \text{(i)}$$

$$\therefore \quad AE^2=OA^2+OE^2 \quad \ldots\ldots \text{(iii)}$$

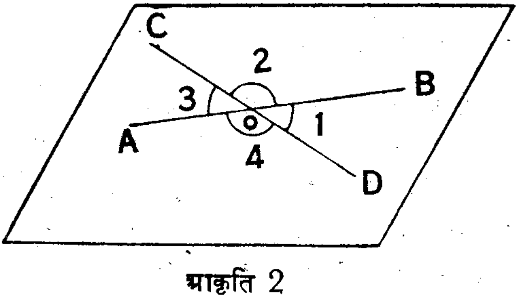
$$\therefore \quad \angle AOE=90^\circ$$

अर्थात्, OE या $OD \perp OA$.

चूँकि सरल रेखा OD, O बिन्दु से खींची गई एक स्वेच्छ रेखा है अतः सरल रेखा AO, बिन्दु O से जाने वाली और समतल में स्थित, प्रत्येक सरल रेखा पर लम्ब है, इसलिए समतल XY पर भी लम्ब है। (परिभाषा—2)

1·2 द्वितल कोण (Dihedral Angle)

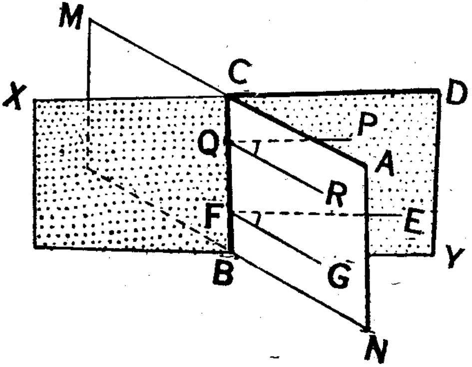
हम जानते हैं कि जब दो सरल रेखाएँ एक दूसरे को काटती हैं अर्थात् जब उनमें एक और केवल एक ही बिन्दु उभयनिष्ठ होता है तो इस प्रकार समतलीय कोणों (Plane Angles) की रचना होती है। (आकृति 2)



आकृति 2

परिभाषा 4

जब दो समतल किसी एक सरल रेखा में एक दूसरे को काटते हैं अर्थात जब उनमें एक और केवल एक ही सरल रेखा उभयनिष्ठ होती है तो इस प्रकार बनी आकृति को **द्वितल कोण** (Dihedral Angle) कहते हैं। आकृति 3 के द्वितल कोण को साधारणतः $A\text{-}BC\text{-}D$ द्वारा दर्शाते हैं।



आकृति 3

समतल XY और MN, सरल रेखा BC में एक दूसरे को काटते हैं। आकृति से स्पष्ट है कि इस प्रकार चार द्वितल कोणों की रचना होती है परन्तु यहाँ केवल द्वितल कोण $A\text{-}BC\text{-}D$ को ध्यान में रखना पर्याप्त होगा जिसे आकृति में गाढ़ी रेखाओं द्वारा दर्शाया गया है।

उभयनिष्ठ सरल रेखा BC, द्वितल कोण $A\text{-}BC\text{-}D$ की कोर (Edge) कहलाती है और समतल AB और DB उसके फलक (Faces) कहलाते हैं।

1·2.1 द्वितल कोण का माप

द्वितल कोण की कोर पर उसके किसी बिन्दु से दोनों समतलों में खींचे गये लम्बों द्वारा निर्मित समतलीय कोण का माप द्वितल कोण का माप होता है। जैसे आकृति 3 में कोर BC के बिन्दु Q से QP और QR क्रमशः समतल XY और MN में, BC पर लम्ब हैं। इस प्रकार समतलीय कोण PQR की रचना हुई जिसका माप द्वितल कोण $A\text{-}BC\text{-}D$ का माप है। अतः द्वितल कोण भी समतलीय कोणों के समान न्यून, सम या अधिक, द्वितलीय कोण होते हैं।

टिप्पणी 1

उपरोक्त विधि से निकाला गया द्वितल कोण का माप सदैव स्थिर होता है। अर्थात कोर पर यदि दूसरा कोई भी बिन्दु जैसे F लें तो भी कोण PQR और कोण EFG परस्पर बराबर होंगे। [इस कथन की सत्यता प्रमेय 87 हाल और स्टीवेन्स स्कूल ज्यामिति (या यूक्लिड-XI, 10) से सरलतापूर्वक स्थापित की जा सकती है।]

टिप्पणी 2

आकृति 3 में,

$$BC \perp QP$$

और

$$BC \perp QR$$

इसलिये प्रमेय 1 से BC, QP और QR से होकर जाने वाले समतल पर लम्ब होगा।

अतः यदि एक समतल किसी द्वितल कोण को उसकी कोर के लम्बरूप काटे तो इस प्रकार प्राप्त प्रतिच्छेदी रेखाओं से बने समतलीय कोण का माप, द्वितल कोण का माप होता है। जैसे—समतल PQR द्वितल कोण $A\text{-}BC\text{-}D$ को इस प्रकार काटता है कि कोर BC, उस पर लम्ब है। इस प्रकार प्राप्त प्रतिच्छेदी रेखाओं QP और QR द्वारा निर्मित समतलीय कोण PQR, द्वितल कोण का माप है।

परिभाषा 5

जब दो समतलों द्वारा निर्मित द्वितल कोण एक समकोण के तुल्य होता है तब वे समतल परस्पर लम्बरूप कहलाते हैं।

1·3. त्रितल कोण (Trihedral Angle) और घन (ठोस) कोण (Solid Angle)

परिभाषा 6

जब तीन या अधिक समतल, किसी निश्चित क्रम में, एक दूसरे को इस प्रकार काटें कि उनकी प्रतिच्छेदी सरल रेखाएँ भी किसी एक बिन्दु पर एक दूसरे को

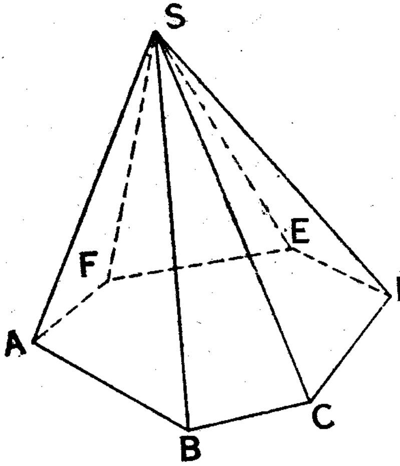
काटें तो इस प्रकार जो आकृति बनती है उसे घन कोण, ठोस कोण (Solid Angle) या बहुतल कोण कहते हैं।

1·3.1 त्रितल कोण

बहुतल कोण की परिभाषा में जब केवल तीन संगामी (Concurrent) समतल हों तो उसे त्रितल कोण कहेंगे। अर्थात,

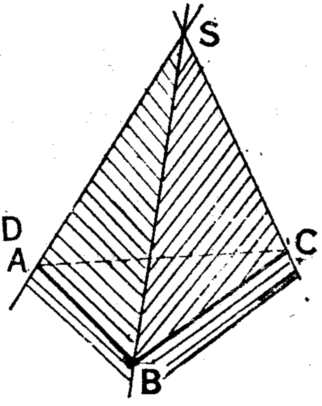
परिभाषा 7

जब तीन समतल, किसी निश्चित क्रम में, एक के बाद दूसरे को इस प्रकार काटें कि उनकी प्रतिच्छेदी रेखाएँ भी किसी एक बिन्दु पर एक दूसरे को काटें तो इस प्रकार बनी आकृति को **त्रितल कोण** (Trihedral Angle) कहते हैं।



आकृति 4 (A)

बहुतल कोण (*S-ABCDEF*)



आकृति 4 (B)

त्रितल कोण (*S-ABC*)

आकृति 4-*B* में तीन संगामी समतल, *SAB*, *SBC*, और *SCA*, जिस त्रितल कोण का निर्माण करते हैं उसे हम (*S-ABC*) द्वारा दर्शाते हैं। यथार्थ में तीन संगामी समतलों द्वारा आठ त्रितल कोणों की रचना होती है परन्तु यहाँ हम अपना ध्यान उनमें से केवल त्रितल कोण (*S-ABC*) पर ही केन्द्रित रखेंगे।

त्रितल कोण (*S-ABC*) में समतल *SAB*, *SBC* और *SCA* उसके फलक (Faces) कहलाते हैं। समतलों का संगमन बिन्दु (Point of Concurrence), *S* त्रितल कोण का शीर्ष (Vertex) कहलाता है। फलकों की प्रतिच्छेदी रेखाएँ *SA*, *SB* और *SC* त्रितल कोण की कोरें (Edges) कहलाती हैं। त्रितल कोण (*S-ABC*) के फलकों के जोड़े, तीन द्वितल कोण (*A-SC-B*, *B-SA-C* और *A-SB-C*) बनाते हैं और कोरों के जोड़े तीन फलक कोण ($\angle ASB$, $\angle BSC$ और $\angle CSA$) बनाते हैं।

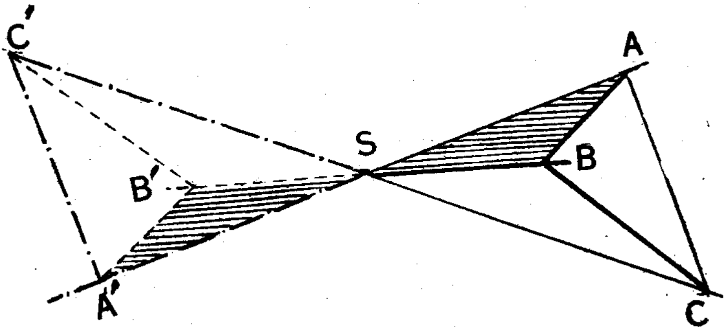
किसी त्रितल कोण के तीन द्वितल कोण और तीन फलक कोण मिल कर उसके **छः भाग** कहलाते हैं।

1·3.2 दो सर्वथा-सम त्रितल कोण (Identically equal trihedral angles)

जब दो त्रितल कोणों को एक दूसरे पर अध्यारोपित (Superposed) किया जा सके, अर्थात जब वे एक दूसरे में पूर्णरूपेण अन्वायुक्त (fitted) हो सकें तब वे सर्वथा सम कहलाते हैं।

दो सर्वथा सम त्रितल कोणों (ठोस कोणों) में एक के फलक कोण और द्वितल कोण, एक निश्चित चक्रीय क्रम में, दूसरे के फलक और द्वितल कोणों के अलग-अलग बराबर होते हैं।

इसके विपरीत, यदि एक त्रितल कोण के फलक और द्वितल कोण, एक चक्रीय क्रम में दूसरे त्रितल कोण के फलक और द्वितल कोणों के अलग-अलग बराबर हों तो वे दोनों त्रितल कोण सर्वथा सम होंगे। उपयुक्त कथनों में चक्रीय क्रम का प्रतिबन्ध इसलिये आवश्यक है कि हम ऐसे दो त्रितल कोण प्राप्त कर सकते हैं जिनमें एक के फलक और द्वितल कोण दूसरे के फलक और द्वितल कोणों के अलग-अलग (परन्तु एक चक्रीय क्रम में नहीं) बराबर हैं परन्तु फिर भी वे त्रितल कोण सर्वथा-सम नहीं हैं। जैसे



आकृति 5

त्रितल कोण (S, ABC) की कोरों को (शीर्ष के परे) बढ़ाने से दूसरे त्रितल कोण $(S, A'B'C')$ की रचना हुई जिसमें स्पष्ट है कि

(i) (S, ABC) के फलक कोण $(S, A'B'C')$ के फलक कोणों के अलग-अलग बराबर हैं। जैसे,

$$\angle ASC = \angle A'SC', \text{ इत्यादि।}$$

(ii) (S, ABC) के द्वितल कोण $(S, A'B'C')$ के द्वितल कोणों के अलग-अलग बराबर हैं। जैसे

$$(B\text{-}SA\text{-}C) = (B'\text{-}SA'\text{-}C') \text{ इत्यादि।}$$

अब मान लो हम त्रितल कोण (S, ABC) को $(S, A'B'C')$ पर अध्यारोपित करने के लिये बिन्दु S उभयनिष्ठ लेकर, कोर SA को कोर SA' पर और फलक ASB को फलक $A'SB'$ पर अन्वायुक्त करें तो चूंकि फलक कोण ASB, कोण $A'SB'$ के बराबर है इसलिए दोनों फलक एक दूसरे को पूर्णरूपेण ढक लेंगे। परन्तु इस स्थिति में दोनों त्रितल कोण इस उभयनिष्ठ फलक के दोनों ओर (बाहर) होंगे। अब यदि हम त्रितल कोण (S, ABC) को $(S, A'B'C')$ पर इस प्रकार अध्यारोपित करें कि फलक SAB, फलक $SA'B'$ को पूर्णरूपेण ढके और दोनों त्रितल कोण इस उभयनिष्ठ फलक के दो ओर न होकर एक ही ओर हों तब निम्नलिखित स्थिति प्राप्त होगी।

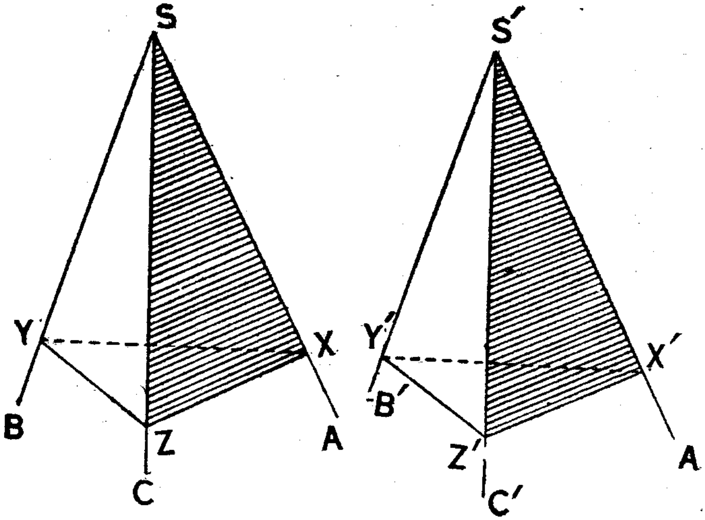
कोर SA, कोर SB' पर और कोर SB, कोर SA' पर गिरेगी। अब चूंकि द्वितल कोण $(B\text{-}SA\text{-}C)$, $(A'\text{-}SB'\text{-}C')$ के तुल्य नहीं है इसलिए फलक SAC, फलक $SB'C'$ पर नहीं पड़ेगा और इसी प्रकार फलक SBC, फलक $SA'C'$ पर नहीं पड़ेगा। अतः त्रितल कोण (S, ABC), $(S, A'B'C')$ में पूर्णरूपेण अन्वायुक्त नहीं होता है और इसलिए वे सर्वथा सम नहीं कहे जा सकते।

आकृति 5 को ध्यान से देखने पर ज्ञात होगा कि त्रितल कोण (S, ABC) और $(S, A'B'C')$ में फलक कोण और द्वितल कोण, अक्षर A, B, C के क्रम में बराबर हैं परन्तु इन अक्षरों का क्रम (S, ABC) में वामावर्त (Anticlock-wise) और $(S, A'B'C')$ में दक्षिणावर्त (Clock-wise) है। अर्थात इन त्रितल कोणों के फलक और द्वितल कोण यद्यपि अलग-अलग बराबर हैं परन्तु एक चक्रीय क्रम में बराबर नहीं हैं इसलिए ये त्रितल कोण परिभाषा के अनुसार सर्वथा-सम नहीं

हैं। इस प्रकार के दो त्रितल कोणों को सममित (Symmetrical) त्रितल कोण कहते हैं।

1·3.3 प्रमेय 2

यदि एक त्रितल कोण (S, ABC) के फलक कोण, $\angle ASB$, $\angle BSC$, $\angle CSA$, क्रमशः दूसरे त्रितल कोण $(S', A'B'C')$ के फलक कोण, $\angle A'S'B'$, $\angle B'S'C'$ और $\angle C'S'A'$ के बराबर हों तो प्रथम त्रितल कोण के द्वितल कोण भी दूसरे के संगत द्वितल कोणों के बराबर होते हैं।



आकृति 6

दिया है—त्रितल कोण (S, ABC) और $(S', A'B'C')$ के फलक कोण क्रमशः बराबर हैं। अर्थात, $\angle ASB = \angle A'S'B'$, $\angle BSC = \angle B'S'C'$

और $\angle CSA = \angle C'S'A'$

सिद्ध करना है—द्वितल कोण $(B\text{-}SA\text{-}C) = (B'\text{-}S'A'\text{-}C')$

$(C\text{-}SB\text{-}A) = (C'\text{-}S'B'\text{-}A')$

और $(A\text{-}SC\text{-}B) = (A'\text{-}S'C'\text{-}B')$

रचना—SA और $S'A'$ कोरों में से क्रमशः SX और $S'X'$ बराबर नाप की काटो।

समतल ASB और ASC में, XY और XZ क्रमशः SA के लम्ब रूप खींचो। इसी प्रकार समतल $A'S'B'$ और $A'S'C'$ में, $X'Y'$ और $X'Z'$ क्रमशः $S'A'$ के लम्बरूप खींचो। अर्थात,

$\angle SXY = \angle S'X'Y'$ ∵ प्रत्येक समकोण

और $\angle SXZ = \angle S'X'Z'$ ∵ प्रत्येक समकोण

उपर्युक्त रचना द्वारा, समतल कोण $\angle YXZ$ और $Y'X'Z'$ क्रमशः द्वितल कोण $(B\text{-}SA\text{-}C)$ और $(B'\text{-}S'A'\text{-}C')$ के माप हैं।

अब, Y, Z और Y', Z' बिन्दुओं को मिलाओ।

उपपत्ति—त्रिभुजों के निम्नलिखित जोड़े सरलता से अनुरूप सिद्ध किये जा सकते हैं।

$\triangle SXY \equiv \triangle S'X'Y'$ [यूक्लिड, Book I-26]

$\triangle SXZ \equiv S'X'Z'$ (” ”)

$$\begin{array}{l} \therefore \\ \\ \text{और} \\ \\ \end{array} \quad \left.\begin{array}{r} SY=S'Y' \\ SZ=S'Z' \\ XY=X'Y' \\ XZ=X'Z' \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

$\triangle SYZ \equiv \triangle S'Y'Z'$ [यूक्लिड, Book 1-4]

$$\therefore \quad YZ = Y'Z' \quad \ldots \quad (2)$$

(1) और (2) से,

$\triangle XYZ \equiv \triangle X'Y'Z'$ [यूक्लिड, Book I-18]

$\therefore \quad \angle YXZ = \angle Y'X'Z'$

$\therefore$ द्वितल कोण $(B\text{-}SA\text{-}C)$ = द्वितल कोण $(B'\text{-}S'A'\text{-}C')$

इस प्रकार शेष द्वितल कोणों को भी बराबर सिद्ध किया जा सकता है। [सा० उ०]

उपप्रमेय

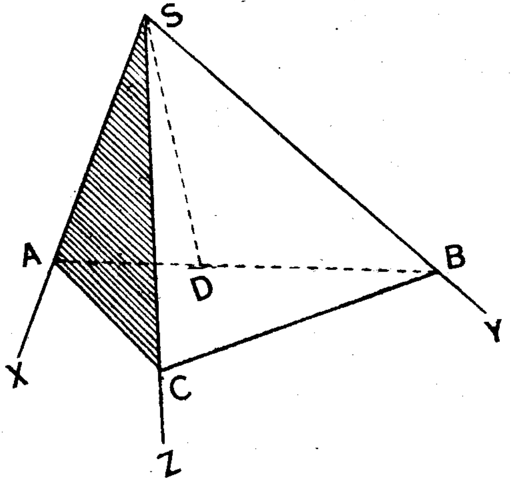
प्रमेय 2 के दोनों त्रितल कोणों में यदि तुल्य फलक कोणों का अनुक्रम (Sequence), किसी एक ही चक्रीय क्रम में हो, तो उस दशा में वे त्रितल कोण सर्वथा-सम होंगे। अर्थात,

यदि एक त्रितल कोण के फलक कोण, एक चक्रीय क्रम में, क्रमशः दूसरे त्रितल कोण के फलक कोणों के, उसी चक्रीय क्रम में बराबर हों तो वे त्रितल कोण सर्वथा सम होंगे ।

प्रमेय 3

त्रितल कोण के कोई भी दो फलक कोणों का योग तीसरे फलक कोण से बड़ा होता है ।

[टिप्पणी—यदि त्रितल कोण के तीनों फलक कोण परस्पर बराबर हैं तो प्रमेय इस दशा में निरर्थक है । अतः हम एक ऐसा त्रितल कोण लेंगे जिसका एक फलक कोण शेष दोनों फलक कोणों से बड़ा है ।]



आकृति 7

दिया है—त्रितल कोण (S, XYZ) में,

$$\angle XSY > \angle XSZ$$

और, $$\angle XSY > \angle ZSY$$

सिद्ध करना है—

$$\angle XSZ + \angle ZSY > \angle XSY$$

रचना

OX और OY कोरों पर क्रमशः A और B कोई बिन्दु लो और फलक ASB के समतल में,

$$\angle ASD = \angle XSZ$$

की रचना करो। अब कोर SZ पर बिन्दु C इस प्रकार लो कि,

$$SC = SD$$

बिन्दु C को A और B से मिलाओ।

उपपत्ति

$\triangle ASD \equiv \triangle ASC$ [यूक्लिड, 1-4]

$\therefore \quad AC = AD \quad \ldots (1)$

$\triangle ABC$ में,

$$AC + BC > AB$$

परन्तु $\quad AB = AD + DB$

$\quad = AC + DB \quad \because (1)$

$\therefore \quad AC + BC > AB = AC + DB$

या, $\quad BC > DB \quad \ldots (2)$

अब, $\triangle$ CSB और $\triangle$ DSB में,

$SC = SD \quad \because$ रचना

SB उभयनिष्ठ

और, $\quad BC > BD \quad \because (2)$

$\therefore \quad \angle CSB > \angle DSB \quad \ldots (3)$

$\because$ [यूक्लिड, 1-24 विलोम]

और, $\quad \angle ASD = \angle ASC \quad \ldots (4) \because$ रचना

(3) और (4) से,

$$\angle ASC + \angle CSB > \angle ASD + \angle DSB$$

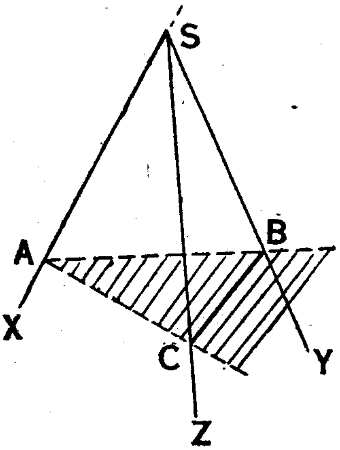
या, $\angle ASC + \angle CSB > \angle ASB$

या, $\angle XSZ + \angle ZSY > XSY$

(सा० उ०)

प्रमेय 4

किसी त्रितल कोण के तीनों फलक कोणों का योग सदैव 360° से कम होता है।



आकृति 8

दिया है—त्रितल कोण (S, XYZ).

सिद्ध करना है—फलक कोणों का योग 360° से कम है। अर्थात,

$$\angle XSY + \angle YSZ + \angle XSZ < 360^\circ.$$

रचना—SX, SY और SZ कोरों पर क्रमशः A, B और C कोई बिन्दु लिये और उन्हें आपस में मिला दिया।

उपपत्ति—रचना द्वारा प्राप्त आकृति को हम चार त्रितल कोणों

$$(S, ABC), (A, SBC), (B, SCA) \text{ और } (C, SAB)$$

के रूप में देख सकते हैं। अब प्रमेम 3 से,

$$\left.\begin{aligned} (A, SBC) \text{ में, } & \angle SAB + \angle SAC > \angle BAC \\ (B, SCA) \text{ में, } & \angle SBA + \angle SBC > \angle ABC \\ (C, SAB) \text{ में, } & \angle SCA + \angle SCB > \angle ACB \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

त्रितल कोण (S, ABC) के तीनों फलक, शीर्ष S के साथ तीन त्रिभुज बनाते हैं और इन तीनों त्रिभुजों के अंतः कोणों का योग $= 3 \times 180° = 540°$। अर्थात,

$$\angle ASB + \angle BSC + \angle CSA + (\angle SAB + \angle SAC) + (\angle SBA + \angle SBC) + (\angle SCA + \angle SCB) = 540°$$

परन्तु (1) से,

$$\angle ASB + \angle BSC + \angle CSA + (\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB) < 540°$$

परंतु $\triangle\ ABC$ में,

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180°$$

$$\therefore \quad \angle ASB + \angle BSC + \angle CSA < 540° - 180° < 360°$$

या, $$\angle XSY + \angle YSZ + \angle ZSX < 360°$$

(सा० उ०)

प्रश्न संग्रह 1

1. सिद्ध करो कि सामान्यतः तीन समतल एक बिन्दु पर मिलते हैं। अपवाद की तीन स्थितियों का वर्णन करो।

2. सिद्ध करो कि समष्टि (Space) में स्थित किसी बिन्दु से सदैव एक ऐसी सरल रेखा खींची जा सकती है जो दो दी हुई विषमतलीय (Skew) रेखाओं में प्रत्येक को काटती है।

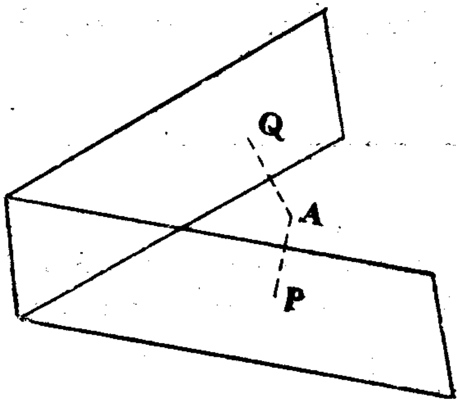
3. किसी बिन्दु S से तीन सरल रेखाएँ SX, SY और SZ खींची गई जो एक ही समतल में नहीं हैं। यदि एक और सरल रेखा SO इस प्रकार खींची जाय कि वह SX, SY और SZ द्वारा निर्मित त्रितल कोण (S, XYZ) के अन्दर है तो सिद्ध करो कि

(अ) $\angle XSO + \angle YSO + \angle ZSO > \frac{1}{2}(\angle XSY + \angle YSZ + \angle ZSX)$

(ब) $\angle XSO + \angle ZSO < \angle XSY + \angle ZSY$

(स) $\angle XSO + \angle YSO + \angle ZSO < \angle XSY + \angle YSZ + \angle ZSX$

4. किसी बिन्दु A से आकृति में दर्शाये अनुसार, दो प्रतिच्छेदी समतलों पर AP और AQ लम्ब डाले। सिद्ध करो कि समतलों के बीच का द्वितल कोण या तो लम्बों के बीच के कोण के बराबर होगा या उसका सम्पूरक (Supplementary) कोण होगा।



आकृति 9

5. कारण सहित समझाओ कि नत तल (Inclined plane) पर स्थित किसी बिन्दु से महत्तम-ढाल-रेखा (Line of greatest slope) (अर्थात वह सरल रेखा जो क्षैतिज समतल के साथ सबसे बड़ा कोण बनाती है) कैसे खींचेंगे ?

अध्याय 2

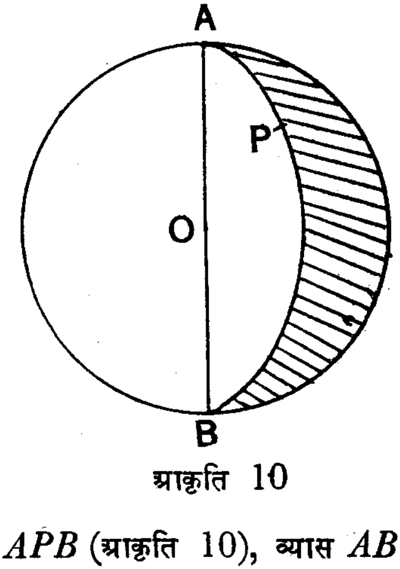
गोलीय ज्यामिति

(Spherical Geometry)

2·1. जिस प्रकार समतल पर खींची गई रेखाओं और आकृतियों (जैसे—त्रिभुज, चतुर्भुज इत्यादि) के गुण-धर्मों का अध्ययन सरल ज्यामिति के अन्तर्गत हम पहली कक्षाओं में कर चुके हैं उसी प्रकार एक गोले के बहिस्तल पर खींची गई रेखाओं और आकृतियों का अध्ययन हम गोलीय ज्यामिति के अन्तर्गत करेंगे।

परिभाषा 8

जब एक अर्धवृत, उसके व्यास को घूर्णन (परिक्रमण) अक्ष (Axis of revolution) मानकर, उसके चारों ओर परिक्रमा करता है तो इसर प्रकार जिस ठोस का निर्माण होता है उसे **गोला** (Sphere) कहते हैं।



आकृति 10

मान लो अर्धवृत APB (आकृति 10), व्यास AB की परिक्रमा करता है तब वृत की अर्ध परिधि APB गोले के बहिस्तल का निर्माण करती है। अर्थात

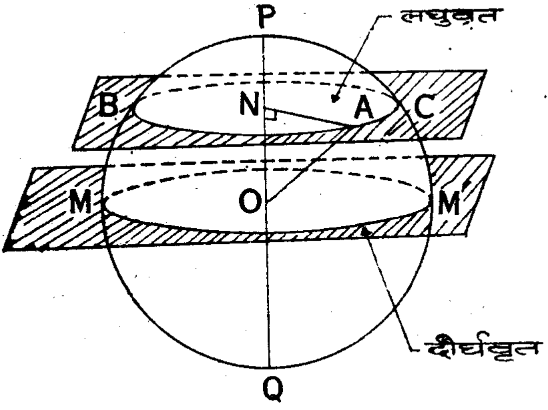
जब अर्ध परिधि एक पूर्ण परिक्रमा करती है तो जिस परिक्रमण-पृष्ठ (Surface of revolution) का निर्माण होता है वह **गोले का बहिस्तल** कहलाता है, जिस पर स्थित प्रत्येक बिन्दु गोले के केन्द्र से समान दूरी पर होता है। अतः **गोले का बहिस्तल** समष्टि (Space) में वह बिन्दु-समूह है जिसका प्रत्येक बिन्दु एक स्थिर बिन्दु से सदैव एक अचर दूरी पर रहता है।

स्थिर बिन्दु को गोले का केन्द्र और अचर दूरी को गोले की त्रिज्या कहते हैं। गोले का व्यास उन दो बिन्दुओं के बीच की दूरी है जिनमें केन्द्र से होकर जाने वाली कोई सरल रेखा गोले के बहिस्तल को छेदती है। अतः गोले के असंख्य व्यास हो सकते हैं, परन्तु उनकी लम्बाई समान (त्रिज्या की दूनी) होती है। सामान्यतः 'गोला' कहने से हमारा तात्पर्य उसके बहिस्तल से रहेगा।

2·2 गोले का समतल परिच्छेद (Plane Section of a Sphere)

प्रमेय 5

गोले का प्रत्येक समतल परिच्छेद (काट) एक वृत होता है।



आकृति—11

मान लो, समतल ABC, उस गोले को काटता है जिसका केन्द्र O है और जिसकी त्रिज्या r है। मान लो, समतल परिच्छेद वक्र पर A कोई स्वेच्छ बिन्दु है। केन्द्र बिन्दु O से समतल ABC पर लम्ब डाला जिसकी दूरी $ON=p$ है। OA और AN को मिलाया।

चूंकि ON, समतल ABC पर लम्ब है

$\therefore$ $ON \perp NA$

या $\angle ONA = 90°$

अब, त्रिभुज OAN में,

$$\angle ONA = 90°$$

$\therefore$ $NA^2 = OA^2 - ON^2$ $\because$ पेथागोरस साध्य

या, $NA^2 = r^2 - p^2$

या, $NA = \sqrt{(r^2 - p^2)}$

$=$ एक अचर राशि, $\because$ r और p अचर हैं।

चूंकि बिन्दु A समतल परिच्छेद वक्र पर एक स्वेच्छ बिन्दु है अतः बिन्दु A की प्रत्येक स्थिति के लिए उपर्युक्त सम्बन्ध सत्य है। अतः समतल परिच्छेद एक वृत है जिसका केन्द्र N है और त्रिज्या $\sqrt{(r^2 - p^2)}$ है।

सूत्र

$$\left\{\begin{matrix}\textbf{गोले के समतल परिच्छेद वृत्त} \\ \textbf{की त्रिज्या}\end{matrix}\right\}^2 = \begin{matrix}\textbf{(गोले की त्रिज्या)}^2 - \\ \textbf{(गोले के केन्द्र से समतल पर लम्ब)}^2\end{matrix}$$

2·2.1 दीर्घ और लघु वृत्त

जब गोले को काटने वाला समतल गोले के केन्द्र से होकर जाता है तो इस प्रकार जो समतल परिच्छेद वृत्त बनता है वह **दीर्घवृत्त** कहलाता है। प्रमेय 5 में यदि $p = o$ हो, अर्थात गोले के केन्द्र से समतल की लम्ब दूरी शून्य हो तो परिच्छेद एक वृत्त होगा जिसकी त्रिज्या $\sqrt{(r^2 - 0^2)} = r$, गोले की त्रिज्या के बराबर होगी और केन्द्र गोले का ही केन्द्र होगा। अतः दीर्घवृत्त की त्रिज्या गोले की त्रिज्या के बराबर होती है। दूसरे सभी समतल परिच्छेद लघुवृत्त कहलाते हैं क्योंकि इनकी त्रिज्या, $\sqrt{(r^2 - p^2)} < r$, गोले की त्रिज्या से कम होती है।

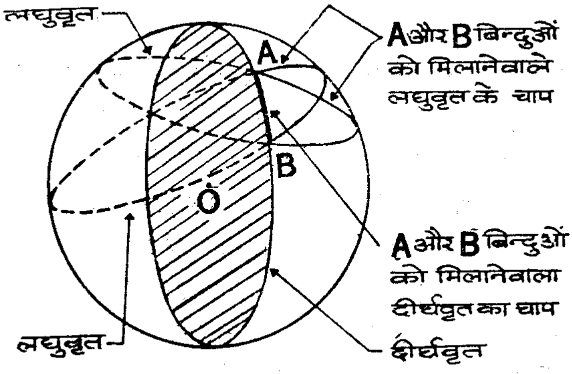
आकृति 10 में MM' गोले पर एक दीर्घवृत्त और ABC लघुवृत्त है। स्पष्ट है कि,

(1) एक ही गोले पर खींचे गये दीर्घवृत्त परस्पर बराबर होते हैं और उनकी त्रिज्या गोले की त्रिज्या के तुल्य होती है।

(2) एक ही गोले पर खींचे गये दो दीर्घ वृत्त उनके कटन बिन्दुओं पर परस्पर समद्विभाजित होते हैं।
[धारा (2·8), प्रमेय-8 में इसकी सत्यता स्थापित की गई है।]

2·2.2 गोले पर स्थित दो बिन्दु

गोले पर स्थित दो बिन्दुओं को हम असंख्य लघु वृत्तों के चापों द्वारा मिला सकते हैं क्योंकि इन दो बिन्दुओं से होकर असंख्य समतल खींचे जा सकते हैं जो गोले को विभिन्न लघु वृत्तों में काटेंगे और दिये हुए बिन्दु उन लघु वृत्तों पर स्थित होंगे। परन्तु दिये हुए दो बिन्दुओं और गोले के केन्द्र से होकर जाने वाला एक और केवल एक ही समतल खींचा जा सकता है जो परिभाषा के अनुसार गोले को एक दीर्घवृत्त में काटेगा। **अतः गोले पर स्थित दो बिन्दुओं को सदैव उन बिन्दुओं से होकर जाने वाले दीर्घवृत्त के चाप द्वारा ही मिलाते हैं।**



आकृति 12

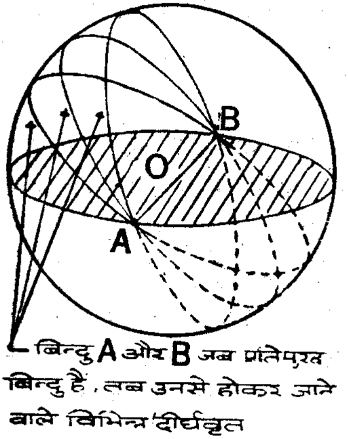
2·2.3 प्रतिव्यासांतिक बिन्दु (Antipodal points)

(अ) गोले के किसी व्यास के छोर प्रतिव्यासांतिक बिन्दु कहलाते हैं। प्रतिमुख बिन्दुओं से गोले पर असंख्य दीर्घवृत्त खींचे जा सकते हैं।

परन्तु

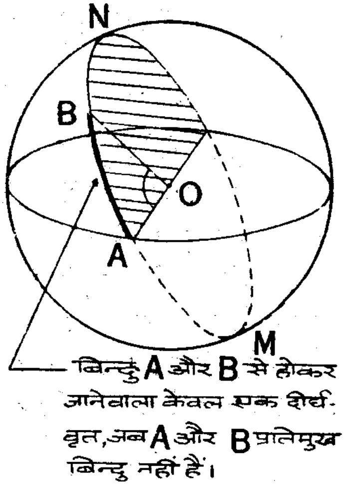
(ब) गोले पर स्थित दो बिन्दुओं से जो प्रतिव्यासांतिक बिन्दु नहीं हैं; एक और केवल एक दीर्घवृत्त खींचा जा सकता है।

प्रतिव्यासांतिक बिन्दुओं से होकर जाने वाले असंख्य दीर्घवृत हो सकते हैं क्योंकि इन बिन्दुओं को मिलाने वाली सरल रेखा गोले का एक व्यास होती है जिस पर



बिन्दु A और B जब प्रतिमुख बिन्दु हैं, तब उनसे होकर जाने वाले विभिन्न दीर्घवृत्त

आकृति 13 (*A*)



बिन्दु A और B से होकर जानेवाला केवल एक दीर्घ-वृत, जब A और B प्रतिमुख बिन्दु नहीं हैं।

आकृति 13 (*B*)

गोले का केन्द्र भी स्थित होता है। अतः प्रतिव्यासांतिक बिन्दु और गोले का केन्द्र एक ही सरल रेखा (व्यास) पर स्थित हुए। इस सरल रेखा से असंख्य समतल खींचे जा सकते हैं जिनमें प्रत्येक का गोले पर परिच्छेद एक दीर्घवृत्त होगा। अतः प्रतिव्यासांतिक बिन्दुओं से होकर जाने वाले असंख्य दीर्घवृत्तों का निर्माण किया जा सकता है, जैसे—आकृति 13 (*A*) में दर्शाया गया है। परन्तु यदि गोले पर स्थित कोई दो बिन्दु प्रतिव्यासांतिक बिन्दु नहीं हैं तो उनमें से होकर जाने वाला केवल एक ही दीर्घ वृत्त हो सकता है। जैसे, मान लो—13 (*B*) में *A* और *B* दो बिन्दु हैं जो प्रतिव्यासांतिक बिन्दु (किसी व्यास के छोर) नहीं हैं। *A* और *B* बिन्दुओं से होकर जाने वाले दीर्घवृत्त का समतल गोले के केन्द्र, *O* से भी जायेगा। परन्तु *A*, *B* और *O*, (जो एक ही सरल रेखा में नहीं हैं) तीन बिन्दुओं से होकर जाने वाला एक और केवल एक ही समतल हो सकता है अतः *A* और *B* से जाने वाला केवल एक ही दीर्घ वृत्त सम्भव है।

2·2.4 गोले पर स्थित दो बिन्दुओं को मिलाने वाला लघुतम चाप

गोले पर स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं को मिलाने वाला लघुतम चाप वह होगा जिसकी वक्रता लघुतम होगी। दूसरे शब्दों में यह उस वृत्त का चाप होगा जिसकी

त्रिज्या अधिकतम हो। हम जानते हैं कि गोले पर स्थित वृत्तों में अधिकतम त्रिज्या दीर्घ वृत्त की होती है जो गोले की त्रिज्या के बराबर होती है। अतः गोले पर स्थित दो बिन्दुओं को मिलाने वाला चाप, उन बिन्दुओं से होकर जाने वाले दीर्घ वृत्त का भाग होता है।

(i) यदि ये बिन्दु प्रतिव्यासांतिक बिन्दु नहीं हैं तो ये बिन्दु दीर्घ वृत्त को दो असमान भागों में विभाजित करते हैं जिनमें से छोटा भाग लघु-चाप और बड़ा भाग दीर्घ-चाप कहलाता है। आकृति 13 (B) में A और B को मिलाने वाला लघु-चाप गाढ़ी रेखा द्वारा दर्शाया गया है और $AMNB$, दीर्घ चाप दर्शाता है।

(ii) यदि ये बिन्दु प्रतिव्यासांतिक बिन्दु हैं तो ये दीर्घ वृत्त को समद्विभाजित करते हैं।

सामान्यतः शेष पुस्तक में, गोले पर स्थित दो बिन्दुओं को मिलाने वाले चाप से हमारा तात्पर्य, सदैव, दीर्घवृत्त के लघु-चाप से रहेगा।

2·2.5 गोले पर स्थित दो बिन्दुओं के बीच की दूरी : गोलीय दूरी (Spherical Distance)

गोले पर स्थित दो बिन्दुओं के बीच की **गोलीय दूरी** उनको मिलाने वाले लघु-चाप की लम्बाई होती है। जैसे, आकृति 13 (B) में A और B बिन्दुओं के बीच की गोलीय दूरी, चाप AB की लम्बाई के बराबर है।

कोणीय दूरी (Angular Distance)

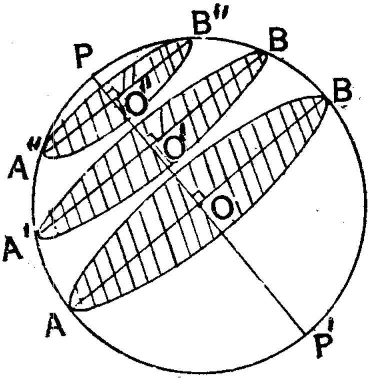
गोले पर स्थित दो बिन्दुओं को मिलाने वाले चाप द्वारा गोले के केन्द्र पर जो कोण बनता है उसकी माप बिन्दुओं के बीच की कोणीय दूरी कहलाती है। जैसे— आकृति 13 (B) में A और B बिन्दुओं के बीच की कोणीय दूरी, कोण AOB के बराबर है।

2·3 गोले पर स्थित वृत्तों के अक्ष (Axis) और ध्रुव (Poles)

परिभाषा 9

अक्ष—गोले पर स्थित किसी वृत्त (लघु या दीर्घ) का अक्ष, गोले का वह व्यास होता है जो वृत्त के समतल पर लम्ब हो।

ध्रुव—गोले पर स्थित किसी वृत्त का अक्ष, गोले को जिन दो बिन्दुओं में काटता है वे वृत्त के ध्रुव कहलाते हैं।



आकृति 14

आकृति में, व्यास PP' दीर्घ वृत्त AB और लघु-वृत्त $A'B'$, $A''B''$ का उभयनिष्ठ अक्ष है। इसी प्रकार बिन्दु P और P' इन सभी वृत्तों के उभयनिष्ठ ध्रुव हैं।

स्पष्ट है कि

(i) किसी वृत्त और गोले के केन्द्रों को मिलाने वाली सरल रेखा, वृत का अक्ष होती है।

(ii) किसी वृत्त के ध्रुव से उसके समतल पर डाला गया लम्ब वृत्त के केन्द्र से होकर जाता है।

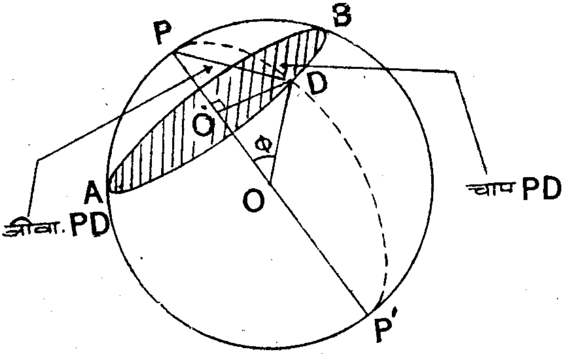
(iii) उन सभी वृत्तों का अक्ष एक ही होता है जिनके समतल समान्तर होते हैं।

(iv) लघु वृत्त के ध्रुव उसके समतल से असमान दूरी पर होते हैं। पास वाले ध्रुव को केवल ध्रुव और दूर वाले को दूसरा ध्रुव कहते हैं।

(v) गोले पर स्थित प्रत्येक प्रतिव्यासांतिक बिन्दुओं का जोड़ा किसी वृत्त के ध्रुव होते हैं, जिनको मिलाने वाला व्यास उस वृत्त का अक्ष होता है।

2·3.1 ध्रुव के गुण धर्म

1. गोले पर स्थित किसी वृत्त (लघु या दीर्घ) का ध्रुव, वृत्त की परिधि पर स्थित प्रत्येक बिन्दु से समान दूरी पर होता है।



आकृति 15

मान लो बिन्दु P, लघु वृत्त AB का एक ध्रुव है। वृत्त का केन्द्र O' है। वृत्त की परिधि पर D एक स्वेच्छ बिन्दु (Arbitrary point) है। $O'D$ को मिलाया। अब चूँकि अक्ष PP' अर्थात PO' वृत्त के समतल पर लम्ब है अतः वह इस समतल में स्थित प्रत्येक सरल रेखा पर लम्ब है।

$$\therefore \qquad PO' \perp O'D$$

$\triangle PO'D$ में, पायथागोरस के साध्य से,

$$PD^2 = PO'^2 + O'D^2$$

परन्तु,

PO' = वृत्त के समतल से ध्रुव की लम्ब दूरी

= एक अचर राशि (दिये हुए लघु वृत्त के लिए)

और, $O'D$ = वृत्त की त्रिज्या

= एक अचर राशि

$\therefore$ PD = एक अचर राशि

चूँकि D, वृत्त की परिधि पर एक स्वेच्छ बिन्दु है इसलिए D की प्रत्येक स्थिति के लिये PD दूरी एक अचर राशि होगी।

अब P और D बिन्दुओं से होकर जाने वाले दीर्घवृत्त, PDP' की रचना करो। चाप PD, परिभाषा (§ 2·2.5) के अनुसार ध्रुव P और बिन्दु D के बीच की गोलीय दूरी है। चूंकि जीवा (Chord) PD एक अचर राशि है इसलिए चाप (Arc) PD की लम्बाई भी अचर है। अर्थात, वृत्त की परिधि पर स्थित प्रत्येक बिन्दु की, उसके ध्रुव से गोलोय दूरी समान होती है।

और चूंकि समान वृत्तों के समान लम्बाई के चाप, वृत्त के केन्द्र पर समान कोण आंतरित करते हैं इसलिए बिन्दु D की (वृत्त की परिधि पर) प्रत्येक स्थिति में,

$$\angle POD = \phi = \text{अचर राशि,}$$

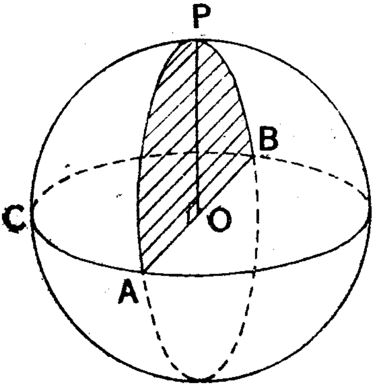
अर्थात,

वृत्त की परिधि पर स्थित प्रत्येक बिन्दु की उसके ध्रुव से कोणीय दूरी समान होती है।

2. गोले पर स्थित किसी दीर्घवृत्त के ध्रुव और उसकी परिधि पर के किसी बिन्दु के बीच गोलीय दूरी एक चतुर्थांश होती है।

या,

किसी दीर्घवृत्त के ध्रुव और उसकी परिधि पर के किसी बिन्दु को मिलाने वाले चाप की लम्बाई एक चतुर्थांश होती है।



आकृति 16

मान लो P, दीर्घवृत्त ABC का ध्रुव और बिन्दु O केन्द्र है। बिन्दु A वृत्त ABC की परिधि पर एक स्वेच्छ बिन्दु है। P और A बिन्दुओं से होकर जाने वाला दीर्घवृत्त APB खींचो।

सिद्ध करना है कि चाप PA एक चतुर्थांश के बराबर है।

बिन्दु O दीर्घवृत्त का केन्द्र है अतः वह गोले का भी केन्द्र है और PO रेखा वृत्त, ABC का अक्ष है। अर्थात PO, वृत्त ABC के समतल पर लम्ब है।

$\therefore \quad \angle POA=\pi/2 \qquad \because$ रेखा OA, वृत्त के समतल में स्थित है।

$\therefore$ चाप $PA=$ एक चतुर्थांश।

2·4 चाप और उसके ध्रुव से सम्बन्धित प्रमेय

निम्न प्रमेयों का उद्देश्य यह दर्शाना है कि किन विशेष परिस्थितियों में गोले पर स्थित एक बिन्दु किसी दिये हुए चाप या वृत्त का ध्रुव हो सकता है।

प्रमेय 6

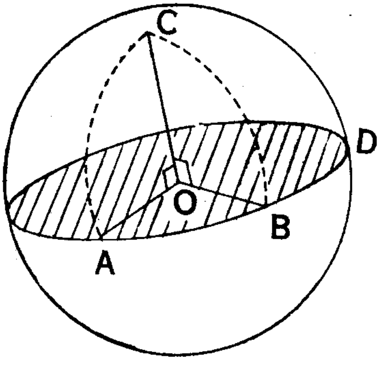
यदि गोले पर स्थित किसी बिन्दु की गोलीय दूरी, दूसरे दो बिन्दुओं से, जो प्रतिव्यासांतिक बिन्दु नहीं हैं, एक चतुर्थांश के बराबर हो तो वह बिन्दु उन दो बिन्दुओं को मिलाने वाले चाप या उससे होकर जाने वाले दीर्घवृत्त का ध्रुव होता है।

मान लो बिन्दु C की, A और B बिन्दुओं से, गोलीय दूरी चतुर्थांश के बराबर है। अर्थात,

गोलीय दूरी $CA=$ एक चतुर्थांश या, $\angle COA=\pi/2$

और, गोलीय दूरी $CB=$ एक चतुर्थांश या, $\angle COB=\pi/2$.

सिद्ध करना है कि, बिन्दु C, बिन्दु A और B से होकर जाने वाले दीर्घवृत्त का ध्रुव है।

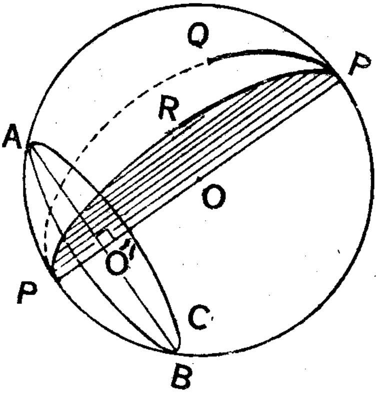


आकृति 17

चूंकि $\angle COA$ और $\angle COB$ प्रत्येक समकोण के बराबर है अतः OC, OA और OB पर, उनके कटन बिन्दु O पर, लम्ब है। प्रमेय 1 से OC, OA और OB से होकर जाने वाले समतल पर भी लम्ब है। चूंकि यह समतल गोले के केन्द्र से होकर जाता है इसलिए इसका परिच्छेद, दीर्घवृत्त ABD है। अतः OC दीर्घवृत्त ABD का अक्ष है और बिन्दु C उसका एक ध्रुव है।

प्रमेय 7

गोले पर के किसी बिन्दु से यदि दो चाप, जो किसी एक ही दीर्घवृत्त के भाग न हों, इस प्रकार के खींचे जा सकें कि उनके समतल किसी दिये हुए वृत्त (लघु या दीर्घ) के समतल पर लम्ब हों तो वह बिन्दु दिये हुए वृत्त का एक ध्रुव होगा।



आकृति 18

मान लो गोले पर स्थित स्वेच्छ बिन्दु P से खींचे गये चाप PQ और PR क्रमशः दीर्घवृत्त PQP' और PRP' के चाप हैं। दिया है कि इन चापों या इनके दीर्घवृत्तों के समतल, लघुवृत्त ABC के समतल पर लम्ब हैं इसलिए इन चापों के दीर्घवृत्तों की प्रतिच्छेद-रेखा, PP' भी वृत्त ABC के समतल पर लम्ब होगी। और चूकि PP' गोले के केन्द्र से होकर जाती है और वृत्त ABC पर लम्ब है इसलिए वृत्त ABC के केन्द्र से भी होकर जायेगी। अतः PP' वृत्त ABC की अक्ष रेखा है और बिन्दु P उसका एक ध्रुव है।

2·5 लघुवृत्त की गोलीय और कोणीय त्रिज्या

परिभाषा 10

किसी लघुवृत्त के ध्रुव और उसकी परिधि पर के किसी बिन्दु को गोलीय एवं कोणीय दूरी को क्रमशः उसकी गोलीय एवं कोणीय त्रिज्या कहते हैं।

दूसरे शब्दों में, किसी लघुवृत्त की गोलीय त्रिज्या, उसके ध्रुव और उसकी परिधि पर के किसी बिन्दु से होकर जाने वाले दीर्घवृत्त पर इन बिन्दुओं को मिलाने वाले चाप की लम्बाई होती है।

स्पष्ट है कि, प्रत्येक दीर्घवृत्त की गोलीय त्रिज्या एक चतुर्थांश के बराबर होती है।

आकृति 15 में, चाप PD लघुवृत्त ABD की गोलीय त्रिज्या और कोण $POD=\phi$ उसकी कोणीय त्रिज्या दर्शाता है।

2·6 द्वितीयक वृत्त (Secondary Circles)

परिभाषा 11

गोले पर स्थित किसी वृत्त (लघु या दीर्घ) के ध्रुवों से होकर जाने वाला वृत्त दिये हुए वृत्त का **द्वितीयक** कहलाता है, जैसे आकृति-15 में वृत्त PDP', लघुवृत्त ADB का द्वितीयक है। दूसरे शब्दों में, दिये हुए वृत्त के अक्ष से होकर जाने वाले समतल द्वारा गोले का परिच्छेद, दिये हुए वृत्त का द्वितीयक वृत्त होता है। अतः स्पष्ट है कि द्वितीयक वृत्तों के समतल दिये हुए वृत्त, जिसे **मूल वृत्त** (Primary circle) भी कहते है; के समतल पर लम्ब रूप होते हैं।

2·6.1 द्वितीयक वृत्तों के गुण

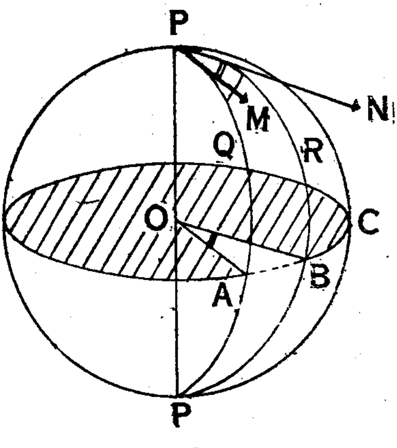
1. प्रत्येक द्वितीयक वृत्त एक दीर्घवृत्त होता है, क्योंकि वह दिये हुए मूल वृत्त के ध्रुवों से होकर जाता है।
2. एक मूल वृत्त के असंख्य द्वितीयक वृत्त हो सकते हैं क्योंकि मूल वृत्त के ध्रुवों को मिलाने वाली रेखा गोले का एक व्यास होती है जिससे होकर जाने वाले समतल खींचे जा सकते है जिनके परिच्छेद असंख्य दीर्घवृत्त होंगे।

3. दो दीर्घवृत्तों के समतल यदि लम्ब रूप हों तो वे परस्पर एक दूसरे के द्वितीयक होते हैं, या एक दीर्घ मूल वृत्त अपने द्वितीयक वृत्तों को समकोण पर काटता है (अर्थात उनके समतल लम्ब रूप होते हैं)। क्योंकि ऐसी स्थिति में प्रत्येक दीर्घवृत्त का अक्ष दूसरे दीर्घवृत्त के समतल में स्थित होगा, इसलिये वे एक दूसरे के द्वितीयक हुए।
4. दो दीर्घवृत्तों का केवल एक उभयनिष्ठ द्वितीयक होता है क्योंकि दो दीर्घवृत्तों के दो अक्षों (जो गोले के केन्द्र पर एक दूसरे को काटने वाले दो व्यास हैं) से जाने वाला केवल एक ही समतल हो सकता है जिसका गोले से परिच्छेद अभीष्ट द्वितीयक होगा।
5. यदि एक मूल वृत्त (लघु अथवा दीर्घ) के दो द्वितीयक किसी बिन्दु P से होकर जाते हैं तो वह बिन्दु मूल वृत्त का एक ध्रुव होता है, क्योंकि मूल वृत्त का अक्ष दोनों द्वितीयकों के समतलों में स्थित है अर्थात दोनों द्वितीयक वृत्त मूल वृत्त के अक्ष में काटते हैं। अतः बिन्दु P भी अक्ष पर स्थित है और इसलिए वह मूल वृत्त का एक ध्रुव है।

2·7 गोलीय कोण (Spherical Angle)

परिभाषा 12

गोले पर स्थित दो प्रतिच्छेदी-चापों (Intersecting Arcs) द्वारा उनके प्रतिच्छेद-बिन्दु पर निर्मित कोण को **गोलीय-कोण** कहते हैं। प्रतिच्छेदी चाप, गोलीय कोण की भुजाएँ कहलाती हैं तथा प्रतिच्छेद-बिन्दु शीर्ष कहलाता है।



आकृति 19

आकृति में कोण QPR, PQ और PR चापों द्वारा निर्मित गोलीय कोण दर्शाता है। बिन्दु P इसका शीर्ष है और चाप PQ तथा PR भुजाएँ।

2·7.1 गोलीय कोण का माप

गोलीय कोण को उसकी भुजाओं के समतलों द्वारा निर्मित द्वितल-कोण से नापते हैं।

आकृति-19 में मान लो, वृत ABC, चाप PQ और PR के दीर्घवृत्तों का उभयनिष्ठ द्वितीयक है। अतः वृत्त ABC का समतल, चाप PQ और PR के समतलों पर लम्ब रूप है। मान लो चाप PQ और PR, उनके दीर्घवृत्तों को पूर्ण करने पर, वृत्त ABC को A और B बिन्दुओं में काटते हैं। गोलीय कोण QPR, उसकी भुजाओं (चाप PQ और PR) के समतलों द्वारा निर्मित द्वितल कोण $Q\text{-}OP\text{-}R$ या $A\text{-}PP'\text{-}B$ के बराबर हैं। परन्तु द्वितल-कोण $A\text{-}PP'\text{-}B$ को समतल कोण AOB द्वारा नापा जाता है। (1·2.1) और समतल कोण AOB को चाप AB की लम्बाई के पदों में नापते हैं। अतः

गोलीय कोण को, उसकी भुजाओं के दीर्घवृत्तों द्वारा, उनके उभयनिष्ट द्वितीयक पर आंतरित चाप द्वारा नापते हैं या, इस चाप, जो समतल कोण गोले के केन्द्र पर बनाता है, द्वारा भी नापते हैं।

जैसे, गोलीय कोण QPR को उसकी भुजाओं (चाप PQ और PR) के दीर्घवृत्तों PQP' और PRP' द्वारा उनके उभयनिष्ठ द्वितीयक, वृत्त ABC पर आन्तरित चाप AB द्वारा या, $\angle AOB$ द्वारा नापते हैं।

2·7.2 समतल ज्यामिति में दो वक्रों का प्रतिच्छेदन-कोण (Angle of Intersection) इस प्रकार से परिभाषित किया गया है—**दो वक्रों का प्रतिच्छेदन-कोण, उन वक्रों के कटन बिन्दु पर के स्पर्शों के बीच का कोण होता है।**

यहाँ दोनों वक्र एक ही समतल में होते हैं और इसलिए उनके स्पर्श भी उसी समतल में स्थित होते हैं। गोलीय कोण (परिभाषा-12, धारा 2·7) में उसकी भुजाओं के चाप एक ही समतल में स्थित नहीं होते। परन्तु चापों के कटन बिन्दु पर उनके स्पर्शों से होकर जाने वाले समतल में उन स्पर्शों के बीच का कोण मापा जा सकता है। यहाँ हमारा उद्देश्य यह सिद्ध करना है कि चापों द्वारा बने गोलीय कोण और उन्हीं चापों (वक्रों) के प्रतिच्छेदन-कोण पर परस्पर बराबर होते हैं।

आकृति-19 में, PQ और PR दो प्रतिच्छेदी चाप हैं। मान लो, ये चाप (यदि आवश्यकता हो तो उनके दीर्घवृत्तों को खींचने पर) उनके उभयनिष्ठ द्वितीयक वृत्त, ABC को A और B बिन्दुओं में काटते हैं और मान लो PM और PN, उन चापों की, उनके कटन बिन्दु पर, स्पर्श रेखाएँ हैं।

चूंकि, PM और PN जो क्रमशः वृत PA और PB के समतलों में हैं, OP पर लम्ब हैं। जहाँ OP वृत्तों की उभयनिष्ठ त्रिज्या तथा समतलों की प्रतिच्छेदन-रेखा है। अतः स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण वृत्त PA और PB के समतलों के बीच के कोण के तुल्य होगा। परन्तु वृत्त PA और PB के समतलों के बीच का कोण, द्वितल-कोण, $A\text{-}PP'\text{-}B$, द्वारा नापते हैं। अतः चापों के स्पर्शों के बीच का कोण, द्वितल कोण $A\text{-}PP'\text{-}B$ के तुल्य है जो चापों द्वारा निर्मित गोलीय कोण का भी माप है। अर्थात चापों का प्रतिच्छेदन-कोण और उनके द्वारा निर्मित गोलीय कोण, दोनों एक ही हैं।

संक्षिप्त में, हम निम्नलिखित परिणामों पर पहुँचते हैं।

दो प्रतिच्छेदी चापों द्वारा निर्मित गोलीय कोणः—

(क) उनके दीर्घवृत्तों के समतलों द्वारा निर्मित द्वितल-कोण के बराबर होता है।

(ख) उनके प्रतिच्छेद बिन्दु पर उनके स्पर्शों के बीच के कोण के बराबर होता है।

(ग) प्रतिच्छेदी चापों के दीर्घवृत्तों द्वारा, उनके उभयनिष्ठ द्वितीयक पर आंतरित चाप द्वारा नापा जा सकता है।

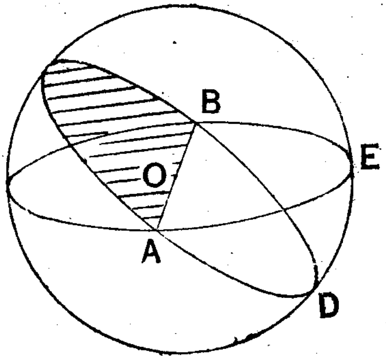
2·8 दो दीर्घवृत्तों का प्रतिच्छेदन

प्रमेय 8

गोले पर स्थित दो दीर्घवृत्त एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

हमें ज्ञात है कि गोले पर स्थित प्रत्येक दीर्घवृत्त का समतल गोले के केन्द्र में से होकर जाता है। अतः दिये हुये दोनों दीर्घवृत्तों के समतल गोले के केन्द्र में से

होकर जाते हैं अतः इनकी प्रतिच्छेदन रेखा भी गोले के केन्द्र से होकर जायेगी

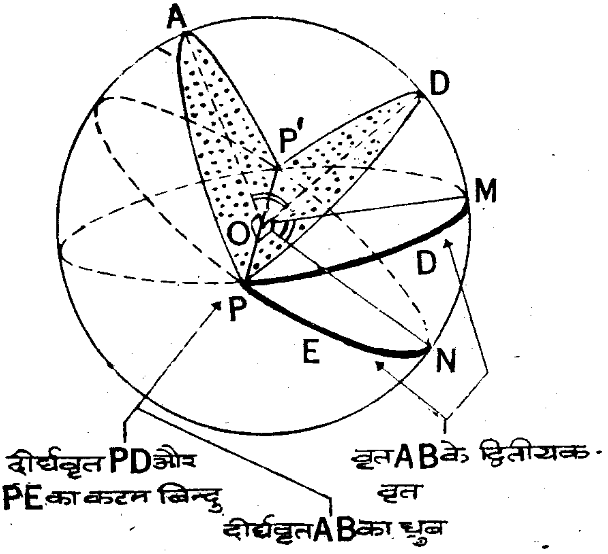


आकृति 20

अर्थात वह गोले का एक व्यास होगी और साथ ही प्रत्येक दीर्घवृत्त का भी व्यास होगी। अतः वे एक दूसरे को समद्विभाजित करेंगे।

प्रमेय 9

दो दीर्घवृत्तों के प्रतिच्छेदन बिन्दु, उन वृत्तों के ध्रुवों से होकर जाने वाले दीर्घवृत्त के ध्रुव होते हैं।



आकृति 21

मान लो, O गोले का केन्द्र है तथा PD और PE दो दीर्घवृत्त हैं जो परस्पर O बिन्दु पर PO या PP' रेखा में एक दूसरे को काटते हैं जहाँ A और B क्रमशः दीर्घवृत्त PD और PE के ध्रुव हैं। बिन्दु A और B से होकर जाने वाला दीर्घवृत्त खींचो। सिद्ध करना है कि बिन्दु P वृत्त AB का एक ध्रुव है।

चूंकि बिन्दु A, दीर्घवृत्त PD का ध्रुव है

$$\therefore \quad OA \perp OP \qquad \ldots (1)$$

जब OP दीर्घवृत्त PD के समतल में है।

इसी प्रकार, चूंकि बिन्दु B, दीर्घवृत्त PE का ध्रुव है

$$\therefore \quad OB \perp OP \qquad \ldots (2)$$

जब OP दीर्घवृत्त PE के समतल में हैं।

(यह सम्भव है, क्योंकि रेखा OP, PD और PE वृत्तों की प्रतिच्छेदन-रेखा है।)

(1), (2) और प्रमेय-1 से,

सरल रेखा OP, OA और OB रेखाओं में से होकर जाने वाले समतल (जिसका गोले से परिच्छेद, दीर्घवृत्त AB है) पर लम्ब है।

$\therefore$ OP, दीर्घवृत्त AB का अक्ष है।

और बिन्दु P, दीर्घवृत्त AB का एक ध्रुव है। इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि दूसरा प्रतिच्छेदन बिन्दु P' दीर्घवृत्त AB का दूसरा ध्रुव होगा।

प्रमेय 10

गोले पर स्थित दो प्रतिच्छेदी दीर्घवृत्तों के बीच का गोलीय कोण उनके ध्रुवों को मिलाने वाले चाप द्वारा केन्द्र पर आन्तरित कोण के तुल्य होता है। दूसरे शब्दों में, दो ध्रुवों के बीच की कोणीय दूरी उनके दीर्घवृत्तों के प्रतिच्छेदन कोण के बराबर होती है।

आकृति-21 में, मान लो दीर्घवृत्त AB, प्रतिच्छेदी वृत्त PD और PE को M और N बिन्दुओं में काटता है। प्रमेय 9 में हमने सिद्ध किया है कि बिन्दु P वृत्त AB का एक ध्रुव है। अतः वृत्त PD और PE, वृत्त AB के द्वितीयक वृत्त

हुए। उनके बीच का गोलीय कोण उनके द्वारा वृत्त AB पर काटे गये चाप MN द्वारा केन्द्र पर निर्मित समतल कोण MON के तुल्य होगा (§ 2·7.1)।

अब,

चाप AM = एक चतुर्थांश $\because$ A वृत्त PD का ध्रुव है।

इसी प्रकार,

चाप BN = एक चतुर्थांश

$$\therefore \quad AB = AM - BM$$
$$= BN - BM \quad \because AM = BN$$
$$= MN$$

अर्थात, चाप AB और MN एक दूसरे के बराबर हैं। और चूंकि ये एक ही वृत्त AB के चाप हैं इसलिए केन्द्र पर बराबर कोण आंतरित करेंगे। अर्थात,

$$\angle AOB = \angle MON$$

अतः **प्रतिच्छेदी दीर्घवृत्तों के बीच का कोण उनके ध्रुवों को मिलाने वाले चाप द्वारा केन्द्र पर आंतरित कोण के तुल्य होता है।**

उपर्युक्त प्रमेय की उपपत्ति में हमें निम्नलिखित निष्कर्ष भी प्राप्त होता है :

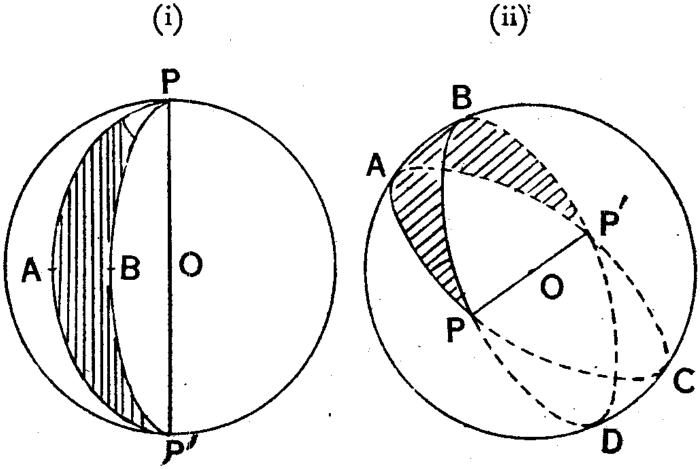
उप-प्रमेय

दो द्वितीयक वृत्तों के बीच का गोलीय कोण, (प्रतिच्छेदन कोण) उनके द्वारा मूल वृत्त पर काटे चाप द्वारा केन्द्र पर निर्मित कोण के तुल्य होता है।

2·9 इंदुक (LUNE)

किसी समतल में स्थित सरल रेखा उस समतल को दो भागों में विभाजित करती है। दो प्रतिच्छेदी सरल रेखाएँ समतल को चार भागों में विभक्त करती हैं। एक प्रतिच्छेदी समतल गोले के बहिस्तल को दो भागों में विभाजित करता है। यदि समतल, गोले के केन्द्र से भी होकर जाता है तो वह गोले को एक दीर्घवृत्त में काटता है। अतः एक दीर्घवृत्त गोले के बहिस्तल को दो बराबर भागों में विभाजित

करता है। इसी प्रकार गोले पर दो प्रतिच्छेदी दीर्घवृत्तों की कल्पना करो। आकृति से स्पष्ट है कि इस स्थिति में गोले का बहिस्तल चार भागों में विभाजित होता है।



आकृति 22

परिभाषा 13

गोले के बहिस्तल का वह भाग जो दो अर्ध दीर्घवृत्तों के बीच स्थित होता है, इंदुक (Lune) कहलाता है।

आकृति 22 (i) और (ii) में दीर्घवृत्त PBP' और PAP' के बीच स्थित बहिस्तल $PAP'BP$ एक इंदुक दर्शाता है। स्पष्ट है कि दो प्रतिच्छेदी वृत्त गोले के बहिस्तल पर चार इंदुकों की रचना करते हैं। आकृति 22 (ii) में दीर्घवृत्त $PAP'C$ और $PBP'D$, गोले पर चार इंदुक (i) $PAP'BP$, (2) $PBP'CP$, (3) $PCP'DP$ और (4) $PDP'AP$, का निर्माण करते हैं। बिन्दु P और P' चारों इंदुकों के सर्वनिष्ठ बिन्दु हैं, इन्हें इंदुकों के शीर्ष कहते हैं।

2·9.1 इंदुक का कोण

इंदुक बनाने वाले अर्ध दीर्घवृत्तों के बीच का गोलीय कोण, इंदुक का कोण कहलाता है। स्पष्ट है कि, (i) इंदुक के दोनों शीर्षों पर के कोण बराबर होते हैं। (ii) एक ही गोले (या बराबर गोलों) पर स्थित दो इंदुक सर्वांगसम होते हैं यदि उनके कोण बराबर हों, क्योंकि इस स्थिति में वे एक दूसरे के संपाती हो जाते हैं।

2·9. 2 इंदुक का क्षेत्रफल

एक ही गोले पर (या बराबर गोलों पर) स्थित दो इंदुकों के क्षेत्रफल उनके कोणों के परिमाणों के समानुपाती होते हैं (यूक्लिड, IV, 1)। गोले के पूरे बहिस्तल को भी हम एक इंदुक मान सकते हैं जिसका कोण चार समकोण या 2π के बराबर है। मान लो इंदुक के कोण का वृत्तीय माप θ है, तब

$$\left[\frac{\text{इंदुक का क्षेत्रफल}}{\text{गोले के बहिस्तल का क्षेत्रफल}}\right]=\left[\frac{\text{इंदुक का कोण}}{2\pi}\right]$$

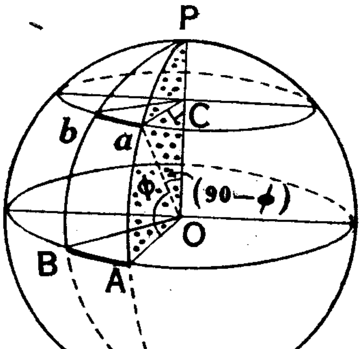
या, $$\frac{\text{इंदुक का क्षेत्रफल}}{4\pi r^2}=\frac{\theta}{2\pi},$$ r, गोले की त्रिज्या

$$\therefore \quad \text{इंदुक का क्षेत्रफल}=\frac{\theta}{2\pi}\times 4\pi r^2$$

$$=2\theta r^2$$

2·10 लघु और दीर्घवृत्त के संगत चाप

मान लो, ab लघुवृत्त का चाप है। लघुवृत्त का केन्द्र C और ध्रुव P है। मान लो O गोले का केन्द्र है, P बिन्दु से दीर्घवृत्त PaA और PbB खींचो जो ध्रुव P के दीर्घवृत्त को A और B बिन्दुओं में काटते हैं। Ca, Cb, OA और OB को मिलाओ। अब चूंकि OP, समतल aCb और AOB पर लम्ब है अतः



आकृति 23

इन समतलों में स्थित Ca, Cb, OA और OB पर भी लम्ब है। अतः समतल $\angle aCb$ और $\angle AOB$, दोनों ही समतल POA और POB के बीच के द्वितल-कोण का माप दर्शाते हैं, इसलिए वे परस्पर बराबर हैं। अतः

$$\angle aCb = \angle AOB$$

अब, सरल त्रिकोणमिति से,

$$\angle aCb = \frac{\text{चाप } ab}{\text{त्रिज्या } Ca} = \angle AOB = \frac{\text{चाप } AB}{\text{त्रिज्या } OA}$$

$$\therefore \qquad \frac{\text{चाप } ab}{\text{चाप } AB} = \frac{\text{त्रिज्या } Ca}{\text{त्रिज्या } OA}$$

$$= \frac{\text{त्रिज्या } Ca}{\text{त्रिज्या } Oa} \qquad \because \; OA = Oa$$

$$= \sin COa$$

$$= \sin(\pi/2 - \phi), \qquad \phi = \text{चाप } Aa$$

$$= \cos\phi$$

$$\therefore \qquad ab = AB\cos\phi$$

और,

$$AB = ab\sec\phi.$$

अध्याय 3

गोलीय त्रिभुज
(SPHERICAL TRIANGLE)

3·1. किसी समतल में स्थित, तीन रेखा खंडों से घिरे क्षेत्र को समतल त्रिभुज (Plane Triangle) या केवल त्रिभुज कहते हैं। इसे दूसरी तरह से भी कहा जा सकता है कि समतल में स्थित तीन बिन्दुओं को, जो एक ही सरल रेखा पर नहीं हैं; रेखा खंडों द्वारा मिलाने पर जो आकृति बनती है उसे त्रिभुज कहते हैं। इसी प्रकार,

परिभाषा 14

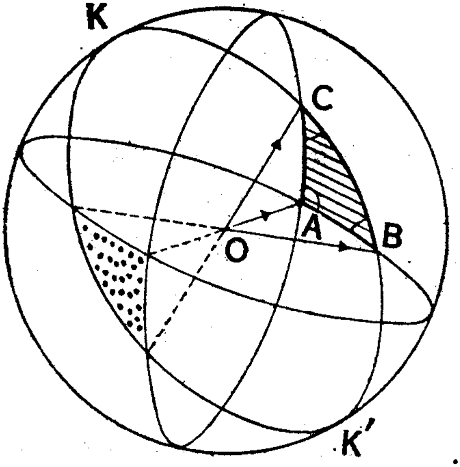
गोले के बहिस्तल पर स्थित, तीन दीर्घवृत्त चापों से घिरे क्षेत्र को **गोलीय त्रिभुज** (Spherical triangle) कहते हैं। दूसरे शब्दों में इसे इस तरह व्यक्त किया जा सकता है कि गोले पर स्थित तीन बिन्दुओं (जो एक ही दीर्घवृत्त पर स्थित नहीं हैं) को दीर्घवृत्त चापों द्वारा मिलाने पर जो आकृति बनती है उसे गोलीय त्रिभुज कहते हैं।

बिन्दुओं को मिलाने वाले चाप त्रिभुज की भुजाएँ और चापों के बीच के गोलीय कोण, त्रिभुज के कोण तथा चापों के कटन बिन्दु, त्रिजभु के शीर्ष कहलाते हैं।

टिप्पणी—गोले पर स्थित दो बिन्दुओं को, जो प्रतिव्यासांतिक बिन्दु नहीं हैं, एक ही दीर्घवृत्त के दो खंडों (लघु चाप और दीर्घ चाप) द्वारा मिला सकते हैं। अतः A,B,C बिन्दुओं को दीर्घवृत्त चापों द्वारा मिलाने पर आठ आकृतियों का निर्माण होता है। परन्तु यदि बिन्दुओं को केवल दीर्घवृत्तों के लघु चापों द्वारा मिलाया जाये तो उस स्थिति में केवल एक गोलीय त्रिभुज का निर्माण होगा।

अन्तर्राष्ट्रीय परम्परा के अनुसार, गोले पर स्थित, दीर्घवृत्तों के तीन लघु चापों द्वारा घिरे क्षेत्र को ही गोलीय त्रिभुज परिभाषित किया जाता है। यह

परिभाषा संदिग्धता रहित केवल एक गोलीय त्रिभुज परिभाषित करती है। अध्याय 2 की धारा (2·2.4) में यह स्पष्टतः माना गया है कि गोले पर स्थित दो बिन्दुओं को मिलाने वाले चाप का तात्पर्य, उन बिन्दुओं से होकर जाने वाले, दीर्घवृत्त के लघु चाप से है। अतः उपर्युक्त परिभाषा को और संक्षिप्त में इस प्रकार से लिख सकते हैं—**'गोले पर स्थित, तीन चापों द्वारा घिरे क्षेत्र को गोलीय त्रिभुज कहते हैं।'**



आकृति 24

आकृति में A, B और C बिन्दुओं को मिलाने वाला गोलीय त्रिभुज ABC छाया द्वारा दर्शाया गया है। चाप AB, BC और CA गोलीय त्रिभुज की भुजाएँ, गोलीय कोण ABC, BCA और CAB उसके कोण तथा बिन्दु A, B और C उसके शीर्ष बिन्दु हैं। प्रचलित परिपाटी के अनुसार, गोलीय त्रिभुज के कोण अंग्रेजी भाषा की वर्णमाला के A, B, C अक्षरों द्वारा और इन कोणों की सम्मुख भुजाएँ क्रमशः a, b, c अक्षरों द्वारा दर्शायी जाती हैं। इस प्रकार तीन भुजाएँ (a, b, c) और तीन कोण (A, B, C) मिलाकर गोलीय त्रिभुज के छः अवयव (Elements) होते हैं।

आठ त्रिभुज

आकृति से स्पष्ट है कि C और B बिन्दुओं को, उनसे होकर जाने वाले दीर्घवृत्त KK' के दो चापों, CB और $CKK'B$ द्वारा मिलाया जा सकता है।

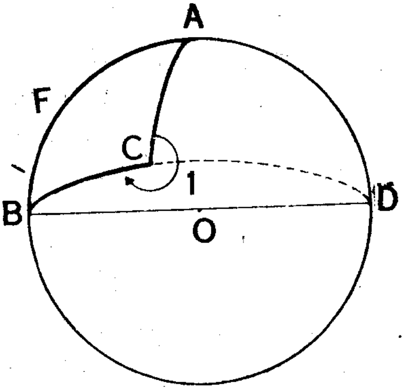
अतः मान लो, B और C बिन्दुओं को A बिन्दु से मिलाया जाये तो हमें दो आकृतियाँ (i) ABC (छाया वाला त्रिभुज) और (ii) $ABK'KC$ प्राप्त होंगी। इस प्रकार, बिन्दुओं के प्रत्येक जोड़े को मिलानेवाले लघु और दीर्घ चाप गोले के बहिस्तल पर कुल मिलाकर आठ आकृतियों की रचना करते हैं {देखो धारा (3·6)}।

शेष पुस्तक में, त्रिभुज ABC से हमारा तात्पर्य उस त्रिभुज से रहेगा जिसकी भुजाओं के रूप में दीर्घवृत्त के लघु चाप हैं, अर्थात् **गोलीय त्रिभुज की भुजाएँ अर्ध वृत्त से छोटी होती हैं।**

3·2. गोलीय त्रिभुज की भुजाओं से सम्बन्धित उपर्युक्त परिपाटी से निम्नलिखित महत्वपूर्ण परिणाम स्थापित किया जा सकता है।

प्रमेय 11

गोलीय त्रिभुज का प्रत्येक कोण दो समकोण से छोटा होता है।



आकृति-25

मान लो, चाप AC, BC और चाप ADB त्रिभुज ABC की भुजाएँ हैं जिसका कोण C दो समकोण से बड़ा है (आकृति में, $\angle C = \angle 1 > \pi$)। चाप BC का दीर्घवृत्त पूर्ण करो जो दीर्घवृत्त AB को D बिन्दु पर काटता है। प्रमेय 8 से, दो दीर्घवृत्त उनके प्रतिच्छेद बिन्दुओं पर एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। अतः दीर्घवृत्त ADB और BCD एक दूसरे को B और D बिन्दुओं पर समद्विभाजित करते हैं इसलिए चाप BD अर्ध वृत्त के तुल्य है। स्पष्ट है कि चाप ADB, जो दिये हुए त्रिभुज की एक भुजा है, अर्ध वृत्त से बड़ा

है परन्तु यह सम्भव नहीं है क्योंकि प्रचलित परिपाटी के अनुसार गोलीय त्रिभुज की भुजाएँ अर्ध वृत्त से छोटी होती हैं। इसलिए यह कल्पना कि गोलीय त्रिभुज का कोई कोण दो समकोण से बड़ा है, प्रचलित परिपाटी का विरोध करती है अतः गोलीय त्रिभुज का प्रत्येक कोण दो समकोण से छोटा होता है।

3·3 गोलीय त्रिभुज और त्रितल कोण

आकृति 24 में यदि गोले के केन्द्र को गोलीय त्रिभुज के शीर्ष बिन्दुओं से मिलाया जाये तो समतल OAB, OBC और OAC, बिन्दु O पर एक त्रितल कोण (O, ABC) का निर्माण करते हैं। त्रितल कोण (O, ABC) और त्रिभुज ABC एक दूसरे से अंतरंग रूप से सम्बन्धित हैं। जैसे, गोलीय त्रिभुज ABC की भुजाओं को हम चाप AB, BC और CA द्वारा दर्शाते हैं। परन्तु,

$$\text{समतल कोण } AOB = \frac{\text{चाप } AB}{\text{त्रिज्या } OA}$$

इसी प्रकार,

$$\text{समतल } \angle BOC = \frac{\text{चाप } BC}{\text{त्रिज्या } OB}$$

और

$$\text{समतल} \angle COA = \frac{\text{चाप } CA}{\text{त्रिज्या } OC}$$

परन्तु $OA = OB = OC$, अतः चाप AB, BC, और CA क्रमशः समतल कोण AOB, BOC और COA के समानुपाती हैं।

उपर्युक्त परिणाम से, गोलीय त्रिभुज की भुजाओं (AB, BC और CA) को उनके द्वारा केन्द्र पर निर्मित समतल कोणों ($\angle AOB$, $\angle BOC$ और $\angle COA$) द्वारा भी दर्शा सकते हैं। धारा (1·3.1) में ये कोण, त्रितल कोण (O, ABC) के फलक कोण परिभाषित किये गये हैं। अतः

1. किसी गोलीय त्रिभुज की भुजाएँ, उसके संगत त्रितल कोण के फलक कोणों के समानुपाती होती हैं अतः गोलीय त्रिभुज की भुजाओं को अंशों में भी नापा जा सकता है।

2. त्रिभुज ABC के कोण, धारा (1·3.1) के अनुसार, त्रितल कोण (O,ABC) के द्वितल कोणों के बराबर हैं, जैसे—कोण A द्वितल कोण $(B\text{-}OA\text{-}C)$ के बराबर है; इत्यादि।

3. धारा (1·3.1) से हमें ज्ञात है कि, एक-बिन्दुगामी तीन समतल, समष्टि में आठ त्रितल कोणों का निर्माण करते हैं। अतः त्रितल कोण के शीर्ष को केन्द्र मानकर कोई गोला खींचा जाये तो ये आठ त्रितल कोण गोले की सतह पर आठ आकृतियों (त्रिभुजों) का निर्माण करेंगे। इन आठ त्रितल कोणों में से हमें अपना ध्यान उस त्रितल कोण पर केन्द्रित करना है जिसके फलक और द्वितल कोणों में से प्रत्येक 180° से कम हों। धारा (1·3.1) की टिप्पणी में हम देख चुके हैं कि गोले पर स्थित तीन बिन्दुओं को दीर्घवृत्त चापों द्वारा मिलाने से भी हमें आठ आकृतियाँ (त्रिभुज) मिलती हैं। परन्तु यदि बिन्दुओं को दीर्घवृत्त के लघु चापों द्वारा मिलाया जाये तो केवल एक गोलीय त्रिभुज प्राप्त होता है। अतः गोले पर परिभाषित गोलीय त्रिभुज का संगत त्रितल कोण वह कोण है जिसके फलक कोण और द्वितल कोण 180° से कम हैं।

3·3.1 गोलीय त्रिभुज और त्रितल कोण के उपर्युक्त सम्बन्धों से, गोलीय त्रिभुज के निम्नलिखित गुण धर्मों का अध्ययन त्रितल कोणों के लिए अध्याय 1, धारा (1·3.3) में स्थापित कुछ परिणामों की सहायता से सरलतापूर्वक किया जा सकता है।

प्रत्येक गोलीय-त्रिभुज में (जिसकी भुजाएँ और कोण 180° से कम हैं)—

1. किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है, क्योंकि त्रितल कोण के दो फलक कोणों का योग तीसरे फलक कोण से बड़ा होता है (प्रमेय 3)।

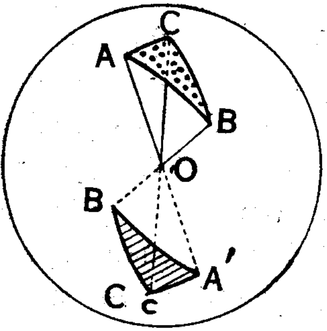
2. तीनों भुजाओं का योग सदैव दीर्घवृत्त की परिधि (चार समकोण) से कम होता है; क्योंकि त्रितल कोण के तीनों फलक कोणों का योग सदैव चार समकोण से कम होता है (प्रमेय 4)।

गोलीय त्रिभुज से सम्बन्धित दूसरे त्रिभुज

3·4 प्रतिव्यासांतिक त्रिभुज (Antipodal Triangle)

दिये हुए गोलीय त्रिभुज को यदि मूल त्रिभुज कहें, तो मूल त्रिभुज के शीर्ष बिन्दुओं के प्रतिमुख बिन्दुओं को दीर्घवृत्त चापों द्वारा मिलाने से जो गोलीय त्रिभुज बनता है उसे प्रतिव्यासांतिक त्रिभुज कहते हैं। जैसे,

मान लो, त्रिभुज ABC के शीर्ष बिन्दुओं से खींचे गये गोले के व्यास, गोले को पुनः A', B' और C' बिन्दुओं में मिलते हैं। बिन्दु A', B' और C' क्रमशः बिन्दु A, B, C के प्रतिमुख बिन्दु हैं। आकृति में दर्शाये अनुसार, त्रिभुज $A'B'C$, मूल त्रिभुज ABC का प्रतिव्यासांतिक त्रिभुज कहलाता है।



आकृति-26

3·4.1 मूल त्रिभुज और उसके प्रतिव्यासांतिक त्रिभुज में सम्बन्ध

1. मूल त्रिभुज के अवयव, उसके प्रतिव्यासांतिक त्रिभुज के संगत अवयवों के तुल्य होते हैं।

2. मूल त्रिभुज और उसका प्रतिव्यासांतिक त्रिभुज, सामान्यतः सर्वथा सम नहीं होते (अर्थात, एक को दूसरे पर अध्यारोपित नहीं किया जा सकता)।

धारा (1·3.2) में हम सिद्ध कर चुके हैं कि त्रितल कोण (O, ABC) और $(O, A'B'C')$ के फलक कोण और द्वितल कोण आपस में बराबर होते हैं परन्तु फिर भी ये त्रितल कोण सर्वथा सम नहीं हैं क्योंकि इनके अवयवों के चक्रीय क्रम की दिशा दोनों में एक-सी नहीं है। इस परिणाम से सम्बन्ध (1) सीधा स्थापित हो जाता है और अम्बन्ध (2) के विषय में हम निम्नलिखित व्याख्या कर सकते हैं।

त्रिभुज ABC और $A'B'C'$ के उन्नत तलों में शीर्षों के क्रम को देखने से पता चलता है कि त्रिभुज ABC में यह क्रम वामावर्त और त्रिभुज $A'B'C'$ में यही क्रम दक्षिणावर्त है। अतः हम कह सकते हैं कि ये त्रिभुज एक दूसरे पर अध्यारोपित नहीं किये जा सकते और इसलिए ये सर्वथा सम नहीं हो सकते।

टिप्पणी

(i) दो समतल त्रिभुज जिनके अवयव परस्पर बराबर हैं (चाहे उनके अवयवों के क्रम विपरीत ही क्यों न हों), सर्वथा सम होते हैं; क्योंकि एक त्रिभुज को पलटने से क्रम की दिशा समान की जा सकती है परन्तु गोलीय त्रिभुजों में पलटने की क्रिया से त्रिभुजों के उन्नत तल एक दूसरे के सम्मुख आ जाते हैं और अध्यारोपण नहीं हो सकता।

(ii) यदि मूल गोलीय त्रिभुज समद्विबाहु त्रिभुज हो तो उसका प्रतिव्यासांतिक त्रिभुज भी एक समद्विबाहु त्रिभुज होगा और वे परस्पर सर्वथा सम होंगे।

क्योंकि, मान लो A और A' शीर्ष हैं, और

$$AB=AC=A'B'=A'C'$$

अब A' को A पर रखने के बाद, B' को C और C' को B पर लाने पर दोनों त्रिभुज एक दूसरे में पूर्णरूपेण अन्वायुक्त हो जायेंगे अतः वे सर्वथ सम हैं।

3. **मूल त्रिभुज और उसका प्रतिव्यासांतिक त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।**

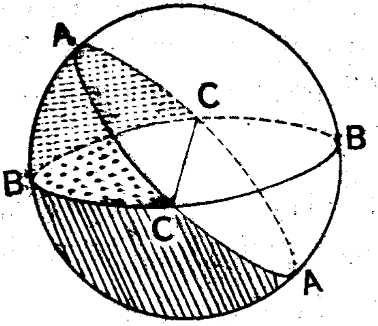
गोलीय त्रिभुज ABC के शीर्ष बिन्दुओं को लघुवृत्त ABC के ध्रुव से मिलाने पर त्रिभुज ABC तीन समद्विबाहु त्रिभुजों में विभाजित हो जाता है। इन समद्विबाहु त्रिभुजों के तीन सर्वथा सम प्रति व्यासांतिक त्रिभुज मिलकर त्रिभुज $A'B'C'$ बनाते हैं। अतः टिप्पणी (ii) से गोलीय त्रिभुज और उसका प्रतिव्यासांतिक त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।

सम्बन्ध (1), (2) और (3) से हम कह सकते हैं कि एक त्रिभुज और उसका प्रतिव्यासांतिक त्रिभुज सब तरह से एक दूसरे के बराबर होते हैं, फिर भी वे एक दूसरे पर अध्यारोपित नहीं किये जा सकते (अर्थात वे सर्वथा सम नहीं होते)। इस प्रकार की समानता वाले त्रिभुजों को **सममितत: बराबर त्रिभुज** (Symmetrically equal triangles) कहते हैं।

3·5 सह-इंदुक त्रिभुज (Co-lunar Triangles)

ऐसे दो त्रिभुज जिनको मिलाकर एक इंदुक पूर्ण हो जाता है, सह-इंदुक त्रिभुज कहलाते हैं। एक गोलीय त्रिभुज के तीन सह-इंदुक त्रिभुज होते हैं।

आकृति में त्रिभुज ABC के क्रमशः $A'BC$, $AB'C$, और ABC' सह-इंदुक त्रिभुज हैं। यह उल्लेखनीय है कि सह-इंदुक त्रिभुजों में, भुजाओं और कोणों के दो समकोण से कम होने वाला प्रतिबन्ध सन्तुष्ट नहीं होता है। सह-इंदुक त्रिभुज $A'BC$ की भुजाएँ a, $\pi-b$, $\pi-c$ और कोण A (क्योंकि इंदुक के शीर्ष कोण A और A' बराबर होते हैं), $\pi-B$ और $\pi-C$ के तुल्य हैं। इसी प्रकार दूसरे सह-इंदुक त्रिभुजों के अवयव भी मूल त्रिभुजों के अवयवों के पदों में ज्ञात किये जा सकते हैं।



आकृति 27

3·6. मूल त्रिभुज के प्रतिमुख त्रिभुज और सह-इंदुक त्रिभुजों के अध्ययन से निम्नलिखित परिणाम स्थापित किया जा सकता है।

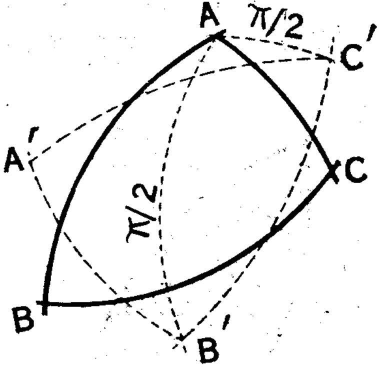
गोले पर स्थित तीन दीर्घवृत्त गोले को आठ गोलीय त्रिभुजों में विभाजित करते हैं।

मान लो, दीर्घवृत्त AB, BC और AC मूल त्रिभुज ABC का निर्माण करते हैं। त्रिभुज ABC के तीन सह-इंदुक त्रिभुज गोले पर स्थित हैं और इन चारों त्रिभुजों के चार प्रतिमुख त्रिभुज भी गोले पर ही स्थित हैं। इस प्रकार हम देखते हैं कि तीन दीर्घवृत्त गोले के बहिस्तल पर कुल आठ त्रिभुजों की रचना करते हैं {देखो धारा (3·1).

3·7 ध्रुवीय त्रिभुज (Polar Triangles)

हम पढ़ चुके हैं कि गोले पर स्थित किसी दीर्घवृत्त चाप (या उससे होकर जाने वाले दीर्घवृत्त) के दो ध्रुव होते हैं। प्रत्येक चाप का दीर्घवृत्त गोले को दो भागों में विभाजित करता है और प्रत्येक भाग में उसका एक ध्रुव स्थित होता

है। साथ ही हम यह भी कह सकते हैं कि गोले पर स्थित कोई भी बिन्दु, दीर्घवृत्त चाप द्वारा विभाजित गोले के दो भागों में से किसी एक भाग में स्थित होता है।



आकृति 28

मान लो, ABC गोले पर स्थित कोई गोलीय त्रिभुज है। मान लो, A', B' और C' बिन्दु क्रमशः चाप BC, CA और AB के वे ध्रुव हैं जो इन चापों द्वारा विभाजित गोले के दो भागों में से उन भागों में स्थित हैं जिनमें इन चापों के सम्मुख शीर्ष भी स्थित हैं। जैसे, A' बिन्दु चाप BC का वह ध्रुव है जो BC द्वारा विभाजित गोले के दो भागों में से उस भाग में स्थित है जिसमें भुजा BC का सम्मुख शीर्ष A स्थित है।

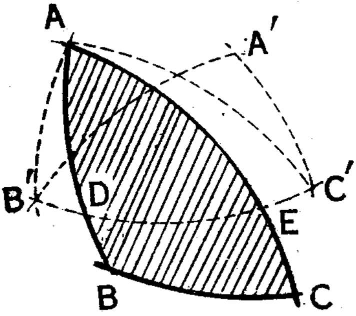
इस स्थिति में बिन्दु A', B' और C' को दीर्घवृत्त चापों द्वारा मिलाने पर जो गोलीय त्रिभुज $A'B'C'$ बनता है उसे त्रिभुज ABC का **ध्रुवीय त्रिभुज** कहते हैं। त्रिभुज ABC ध्रुवीय त्रिभुज $A'B'C'$ का **आधारी त्रिभुज** (Primitive Triangle) कहलाता है।

3·7.1. वास्तव में, किसी गोलीय त्रिभुज की प्रत्येक भुजा (जो एक दीर्घवृत्त चाप है) के दो ध्रुव होते हैं। अतः हम आठ ऐसे त्रिभुजों का निर्माण कर सकते हैं जिनके शीर्ष त्रिभुज ABC की भुजाओं के ध्रुव हैं, अर्थात प्रत्येक त्रिभुज के आठ ध्रुवीय त्रिभुज हो सकते हैं। परन्तु ध्रुवों के चुनने में धारा (3·7) के प्रतिबन्ध के अन्तर्गत केवल एक ही त्रिभुज ध्रुवीय त्रिभुज के रूप में मिलता है। इस एक त्रिभुज को ही ध्रुवीय त्रिभुज परिभाषित किया गया है।

3·7.2 ध्रुवीय त्रिभुजों के गुण धर्म

प्रमेय 12

यदि त्रिभुज $A'B'C'$ गोलीय त्रिभुज ABC का ध्रुवीय त्रिभुज है तो त्रिभुज ABC, गोलीय त्रिभुज $A'B'C'$ का ध्रुवीय त्रिभुज होगा।



आकृति 29

दिया है—गोलीय त्रिभुज ABC, और उसका ध्रुवीय त्रिभुज $A'B'C'$ अर्थात बिन्दु A' चाप BC का वह ध्रुव है जो BC द्वारा विभक्त, गोले के उस भाग में स्थित है जिसमें शीर्ष A स्थित है। इसी प्रकार, B' और C' भी क्रमशः AC और AB के ध्रुव हैं।

सिद्ध करना है—त्रिभुज ABC त्रिभुज $A'B'C'$ का ध्रुवीय त्रिभुज है, अर्थात बिन्दु A चाप $B'C'$ का वह ध्रुव है जो $B'C'$ के द्वारा विभक्त, गोले के उस भाग में स्थित है जिसमें शीर्ष A' स्थित है। इसी प्रकार B और C भी क्रमशः $A'C'$ और $A'B'$ के ध्रुव हैं।

उपपति—चूंकि B' चाप CA का ध्रुव है

$\therefore$ चाप $B'A=\pi/2$ . . . (1)

इसी प्रकार, चूंकि C', चाप AB का ध्रुव है

$\therefore$ चाप $C'A=\pi/2$ . . . (2)

(1), (2) और प्रमेय 6 से,

बिन्दु A, चाप $B'C'$ का एक ध्रुव है। . . . (3)

बिन्दु A और A', चाप BC द्वारा विभक्त, गोले के एक ही भाग में स्थित हैं और बिन्दु A, चाप BC का ध्रुव है इसलिये BC पर स्थित किसी भी बिन्दु की बिन्दु A' से दूरी एक चतुर्थांश के बराबर है। अतएव A' और A से होकर जाने वाले, चाप BC के द्वितीयक पर AA' दूरी एक चतुर्थांश से कम है, अर्थात

AA' एक चतुर्थांश से छोटा है। . . . (4)

और चूंकि बिन्दु A चाप $B'C'$ का ध्रुव है {(3) से} इसलिए $B'C'$ पर स्थित किसी भी बिन्दु से बिन्दु A की दूरी एक चतुर्थांश है, परन्तु AA' एक चतुर्थांश से छोटा है {(4) से},

इसलिए A और A' चाप $B'C'$ द्वारा विभक्त, गोले के एक ही भाग में स्थित हैं।

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि, बिन्दु B चाप $C'A'$ का वह ध्रुव है जो $C'A'$ द्वारा विभक्त, गोले के उस भाग में स्थित है जिसमें $C'A'$ का सम्मुख शीर्ष B' भी स्थित है। और C, चाप $A'B'$ का वह ध्रुव है जो $A'B'$ द्वारा विभक्त, गोले के उस भाग में स्थित है जिसमें $A'B'$ का सम्मुख शीर्ष C' स्थित है।

अतः धारा (3·7) से त्रिभुज ABC, त्रिभुज $A'B'C'$ का ध्रुवीय त्रिभुज है। (सा० उ०)

प्रमेय 13

ध्रुवीय त्रिभुज की भुजाएँ और कोण क्रमशः उसके आधारी त्रिभुज के कोण और भुजाओं के सम्पूरक (Supplementary) होते हैं।

दिया है—मान लो,

(i) गोलीय त्रिभुज ABC की भुजाएँ और कोण क्रमशः a, b, c और A, B, C हैं।

(ii) ध्रुवीय त्रिभुज $A'B'C'$ की भुजाएँ और कोण क्रमशः a', b', c' और A', B', C' हैं।

सिद्ध करना है—

$$\left.\begin{aligned} a' &= \pi - A \\ b' &= \pi - B \\ c' &= \pi - C \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (\text{अ})$$

$$\left.\begin{aligned} A' &= \pi - a \\ B' &= \pi - b \\ C' &= \pi - c \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{(ब)}$$

उपपत्ति—आकृति (29) में,

मान लो चाप $B'C'$ (आवश्यकता हो तो बढ़ाने पर) चाप AB और AC को क्रमशः D और E बिन्दुओं में काटता है।

चूंकि बिन्दु A चाप $B'C'$ का ध्रुव है इसलिए चाप $B'C'$, AD और AE अर्थात AB और AC का उभयनिष्ठ द्वितीयक है। अतः चाप AB और AC के बीच का कोण, अर्थात A, $B'C'$ पर आन्तरिक चाप DE के बराबर है {धारा (2·7.1)}। अर्थात,

$$\text{चाप } DE = A \quad \ldots (1)$$

अब, $B'E = \frac{\pi}{2}$ $\because$ B, चाप AC का ध्रुव है।

और, $C'D = \frac{\pi}{2}$ $\because$ C', चाप AB का धुव है।

$\therefore$ $B'E + C'D = \pi$

या, $B'E + DE + C'E = \pi$

या, $DE + (B'E + EC') = \pi$

या, $DE + a' = \pi$

या, $\angle A + a' = \pi$ $\because$ (i) से

$$\left.\begin{aligned} a' &= \pi - A \\ \text{इसी प्रकार,}\quad b' &= \pi - B \\ \text{और,}\quad c' &= \pi - C \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{(अ)}$$

प्रमेय 12 से, त्रिभुज ABC, त्रिभुज $A'B'C'$ का ध्रुवीय त्रिभुज है इसलिए परिणाम (अ) से,

$$a = \pi - A'$$
$$b = \pi - B'$$
$$c = \pi - C'$$

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} A' &= \pi - a \\ B' &= \pi - b \\ C' &= \pi - c \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{(ब)}$$

अतः ध्रुवीय त्रिभुज की भुजाएँ आधारी त्रिभुज के कोणों की सम्पूरक होती हैं और कोण भुजाओं के सम्पूरक होते हैं। इन सम्बन्धों के कारण इन त्रिभुजों (आधारी और ध्रुवीय) को सम्पूरक त्रिभुज (Supplementary triangles) भी कहते हैं।

3·7.3 द्वैत-प्रमेय सिद्धान्त (PRINCIPLE OF DUALITY OF THEOREMS)

किसी गोलीय त्रिभुज के अवयवों के लिए स्थापित कोई भी व्यापक परिणाम या प्रमेय उसके ध्रुवीय त्रिभुज के अवयवों के लिए भी सत्य होता है। पिछली धारा में स्थापित किया गया है कि ध्रुवीय त्रिभुज की भुजाएँ और कोण क्रमशः उसके आधारी त्रिभुज के कोण और भुजाओं की सम्पूरक होती हैं। अतः हम निम्नलिखित सिद्धांत प्रतिपादित कर सकते हैं :

"गोलीय त्रिभुज के किसी व्यापक प्रमेय या परिणाम में भुजाओं को संगत कोणों के सम्पूरकों और कोणों को संगत भुजाओं के सम्पूरकों से बदल देने पर भी प्रमेय की सत्यता यथावत् रहती है।"

उपर्युक्त सिद्धांत को द्वैत-प्रमेय सिद्धांत कहते है। गोलीय त्रिभुज से सम्बंधित किसी भी परिणाम में द्वैत-प्रमेय सिद्धांत के अनुप्रयोग से एक अतिरिक्त परिणाम प्राप्त किया जा सकता है।

जैसे, मान लो किसी त्रिभुज की तीन भुजाओं और एक कोण में कोई सम्बन्ध सत्य है तो हम द्वैत-प्रमेय सिद्धांत से, तीन कोणों और एक भुजा में एक और सम्बन्ध प्राप्त कर सकते हैं। इस प्रकार के अनेक उदाहरण अध्याय 4 में देखने को मिलेंगे।

3·8 गोलीय त्रिभुज की ज्यामिति

गोलीय त्रिभुज के अवयवों से सम्बन्धित दो महत्वपूर्ण ज्यामितीय परिणामों की सत्यता हम धारा (3·3.1) में स्थापित कर चुके हैं, परन्तु पूर्णता के उद्देश्य से, दूसरे परिणामों के साथ, उनका केवल उल्लेख यहाँ भी किया गया है।

1. गोलीय त्रिभुज की दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक होता है {धारा (3·3.1), 1}।

2. गोलीय त्रिभुज की तीनों भुजाओं का योग, दीर्घवृत्त की परिधि से कम होता है {धारा (3·3.1), 2}।
3. गोलीय त्रिभुज के तीनों कोणों का योग दो समकोण से अधिक और छः समकोण से कम होता है।

मान लो A, B और C गोलीय त्रिभुज ABC के कोण हैं और मान लो उसके ध्रुवीय त्रिभुज की भुजाएँ a', b' और c' हैं, तब

$$a'+b'+c'<2\pi \qquad \because \quad (2)$$

$$\therefore \quad (\pi-A)+(\pi-B)+(\pi-C)<2\pi$$

$\because$ प्रमेय 13 और द्वैत-सिद्धांत

$$\therefore \quad A+B+C>\pi \qquad \ldots \quad \text{(i)}$$

और चूंकि गोलीय त्रिभुज का प्रत्येक कोण दो समकोण से कम होता है,

$$\therefore \quad A+B+C<3\pi \qquad \ldots \quad \text{(ii)}$$

(i) और (ii) से,

$$\pi<A+B+C<3\pi$$

4. गोलीय त्रिभुज के दो कोणों का अन्तर सदैव तीसरे कोण के संपूरक से कम होता है।

मान लों, ABC एक गोलीय त्रिभुज है और उसके ध्रुवीय त्रिभुज की भुजाएँ $a,'$ b' और c' हैं, तब

$$a'+b'>c' \qquad \because (1)$$

$$\therefore \quad (\pi-A)+(\pi-B)>(\pi-C) \quad \because \text{प्रमेय 13 और द्वैत-सिद्धान्त}$$

या,
$$A+B<\pi+C$$

या,
$$A-C<\pi-B$$

इसी प्रकार, हम सिद्ध कर सकते हैं कि, $A-B<\pi-C$ और

$$B-C<\pi-A$$

3·8.1. अध्यारोपण की विधि द्वारा, सरल ज्यामिति के अनुसार, दो गोलीय त्रिभुजों की समानता के सम्बन्ध में निम्नलिखित परिणाम सरलतापूर्वक स्थापित किये जा सकते हैं।

एक ही गोले पर (या समान गोलों पर) स्थित दो त्रिभुज निम्नलिखित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत या तो सर्वथा सम होते हैं या उनके संगत अवयव बराबर होते हैं, अर्थात वे सममिततः बराबर होते हैं,

1. जब एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनके बीच का कोण क्रमशः दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और उनके बीच के कोण के अलग-अलग बराबर हों।
2. जब एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ क्रमशः दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के अलग-अलग बराबर हों।
3. जब एक त्रिभुज के दो कोण और उनकी आसन्न भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के दो कोण और उनकी आसन्न भुजा के अलग-अलग बराबर हों।
4. जब एक त्रिभुज के तीनों कोण क्रमशः दूसरे त्रिभुज के तीनों कोणों के अलग-अलग बराबर हों।

परिणाम (4) गोलीय ज्यामिति और समतल ज्यामिति में एक महत्वपूर्ण भेद दर्शाता है। समतल ज्यामिति में इस प्रतिबन्ध के अन्तर्गत दो त्रिभुज सर्वथा-सम नहीं होते हैं। इस प्रकार के त्रिभुजों को समतल ज्यामिति में सम-रूप त्रिभुज (Similar triangles) परिभाषित किया गया है। गोलीय ज्यामिति में समरूप त्रिभुज नहीं होते, प्रतिबन्ध (4) के अन्तर्गत दो त्रिभुज या तो सर्वथा-सम हो जाते हैं अन्यथा सममिततः समान होते हैं।

मान लो, A, B और C एक गोलीय त्रिभुज के कोण हैं जो क्रमशः दूसरे त्रिभुज के A', B' और C' कोणों के बराबर हैं। द्वैत-प्रमेय सिद्धांत से इन त्रिभुजों के ध्रुवीय त्रिभुजों के कोण भी परस्पर बराबर होंगे। मान लो, a, b, c और a', b', c' क्रमशः दिये हुए त्रिभुजों की भुजाएँ हैं। अतः

$$A=\pi-a=A'=\pi-a'$$

$\therefore$ $$a=a'$$

इसी प्रकार, $$b=b'$$

और, $$c=c'$$

$\therefore$ (2) से दोनों त्रिभुज सममिततः समान हैं।

3·8.2. धारा (3·8.1) के परिणामों की सहायता से, निम्नलिखित परिणाम और स्थापित किये जा सकते हैं।

1. समद्विबाहु गोलीय त्रिभुज के आधार पर के कोण बराबर होते हैं।

मान लो त्रिभुज ABC में भुजा AB और AC बराबर हैं। मान लो D, BC का मध्य बिन्दु है। अब त्रिभुज ADB और ADC में,

$$AB = AC$$

AD, उभयनिष्ठ

और, $BD = DC$ $\because$ D, BC का मध्य बिन्दु, कल्पना द्वारा।

$\therefore$ त्रिभुज ADB और ADC {धारा (3·8.1), 2} सममितत: समान हैं।

$\therefore$ $$\angle B = \angle C$$

2. यदि किसी गोलीय त्रिभुज में दो कोण आपस में बराबर हों तो उनकी सम्मुख भुजाएँ भी परस्पर बराबर होती हैं।

मान लो, A, B, C और a, b, c क्रमश: त्रिभुज ABC के कोण और भुजाएँ हैं तथा A', B', C' और a', b', c' ध्रुवीय त्रिभुज $A'B'C'$ के कोण और भुजाएँ हैं। अत:

$$\left.\begin{array}{lll} A' = \pi - a, & B' = \pi - b, & C' = \pi - c \\ a' = \pi - A, & b' = \pi - B, & c' = \pi - C \end{array}\right\} \quad (\text{अ})$$

और,

दिया है, $$\angle A = \angle B$$

या $$\pi - \angle A = \pi - \angle B$$

$\therefore$ $$a' = b' \qquad \because (\text{अ})$$

अर्थात त्रिभुज $A'B'C'$ की दो भुजाएँ बराबर हैं। इसलिये परिणाम (1) से इनके सम्मुख कोण भी बराबर होंगे। अत:

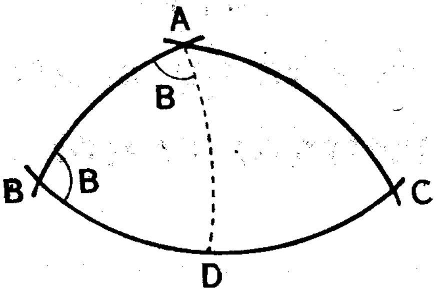
$$\angle A' = \angle B'$$

$\therefore$ $$\pi - a = \pi - b \qquad \because (\text{अ})$$

या, $$a = b$$

3. यदि गोलीय त्रिभज का एक कोण दूसरे कोण से बड़ा है तो बड़े कोण की सम्मुख भुजा, छोटे कोण की सम्मुख भुजा से बड़ी होगी।

मान लो त्रिभुज ABC में $\angle A > \angle B$, तो सिद्ध करना है कि भुजा $BC >$ भुजा AC ।



आकृति 30

AB भुजा के A बिन्दु पर, $\angle B$ के बराबर, $\angle BAD$ की रचना करो। अब,

$AD + DC > AC$ $\because$ धारा (3·8), (1)

$AD = BD$ $\because$ धारा (3·8.2), (2)

$\therefore$ $BD + DC > AC$

या, $BC > AC$

4. **यदि गोलीय त्रिभुज की एक भुजा दूसरी भुजा से बड़ी है तो बड़ी भुजा का सम्मुख कोण भी छोटी भुजा के सम्मख कोण से बड़ा होगा ।**

मान लो, त्रिभुज ABC में A, B, C और a, b, c क्रमशः उसके कोण और भुजाएँ हैं ।

मान लो $a > b$, तो सिद्ध करना है कि,

$$\angle A > \angle B$$

मान लो त्रिभुज $A'B'C'$, त्रिभुज ABC का ध्रुवीय त्रिभुज है जिसमें A', B', C', उसके कोण और a', b', c' उसकी भुजाएँ हैं ।

अब, $a > b$ $\because$ दिया है ।

$\therefore$ $\pi - a < \pi - b$

$\therefore$ $A' < B'$ $\because$ (2), सम्बन्ध (अ)

$\therefore$ $a' < b'$ $\because$ (3)

$\therefore$ $\pi - A < \pi - B$ $\because$ (2), सम्बन्ध (अ)

या, $A > B$

अध्याय 4

गोलीय त्रिभुज की भुजाओं और कोणों में त्रिकोणमितीय सम्बन्ध

4·1. गोलीय त्रिभुज से सम्बन्धित और भी ज्यामितीय परिणाम पिछले अध्याय में स्थापित किये जा सकते थे, परन्तु हमारा उद्देश्य केवल गोलीय ज्यामिति से परिचित होना है अतः पूर्वोक्त विवरण का अध्ययन पर्याप्त है। साथ ही, जिस प्रकार समतल ज्यामिति के जटिल और पेचीदे प्रश्नों को सरल त्रिकोणमिति के सूत्रों की सहायता से सरलतापूर्वक हल कर सकते हैं उसी प्रकार गोलीय ज्यामिति के प्रश्नों की कठिनाई दूर करने में गोलीय त्रिकोणमिति (Spherical Trigonometry) सहायक सिद्ध होती है। अतः इस अध्याय में हम गोलीय त्रिकोणमिति का अध्ययन शुरू करेंगे।

समतल ज्यामिति और त्रिकोणमिति की उपयोगिता का क्षेत्र एक सीमित क्षेत्र है। वास्तव में जिस पृथ्वी पर हम रहते है वह एक गोला है। अतः पृथ्वी पर होने वाली गतिविधियों और उसके भूगोल के अध्ययन में गोलीय ज्यामिति और त्रिकोणमिति का ही प्रयोग होता है। नौसंचालन (Navigation), खगोल-विज्ञान (Astronomy), इत्यादि में गोलीय त्रिकोणमिति का उपयोग विशेष रूप से होता है।

गणित के इतिहास में, विद्वान ग्रीक खगोलज्ञ हिप्पार्क्स (150 B.C.) (Hipparchus) को गोलीय त्रिकोणमिति का जन्मदाता माना है।

4·1.1. किसी गोलीय त्रिभुज में छः अवयव होते हैं, तीन भुजाएँ और तीन कोण, जिन्हें हमने पिछले अध्याय में क्रमशः a, b, c और A, B, C अक्षरों द्वारा दर्शाया है। यदि त्रिभुज के इन छः अवयवों का मान हमें ज्ञात हो तो हम कह सकते हैं कि त्रिभुज के सम्बन्ध में (उसके आकार, क्षेत्रफल इत्यादि) हमें पूर्ण

ज्ञात है। सामान्यतः यदि हमें इन छः अवयवों में से केवल तीन अवयव ज्ञात हों तो शेष तीन अवयवों का मान गोलीय त्रिकोणमिति की सहायता से प्राप्त कर सकते हैं। इस अध्याय में हमारा उद्देश्य गोलीय त्रिभुज के अवयवों के बीच विभिन्न त्रिकोणमितीय सम्बन्ध स्थापित करना है जो त्रिभुजों के निर्धारण (अध्याय 5) में उपयोगी सिद्ध होंगे।

इन सम्बन्धों को हम दो मुख्य खंडों में विभाजित कर सकते हैं। प्रथम खंड में, त्रिभुज के चार अवयवों के बीच और द्वितीय खंड में पांच और छः अवयवों के बीच त्रिकोणमितीय सम्बन्ध स्थापित करेंगे।

प्रथम खण्ड

4·2 चार अवयवों से सम्बन्धित सूत्र

गोलीय त्रिभुज के अवयवों में से चार अवयव निम्न प्रकार से चुने जा सकते हैं।

(अ) तीन भुजाएँ और एक कोण।

(ब) तीन कोण और एक भुजा।

(स) दो भुजाएँ और उनके सम्मुख कोण।

(द) दो भुजाएँ; उनके बीच का कोण और एक और कोण, या
दो कोण, आसन्न भुजा और एक और भुजा।

4·2.1 तीन भुजाओं और एक कोण में त्रिकोणमितीय सम्बन्ध —कोसाइन सूत्र (COSINE FORMULA)

गोलीय त्रिभुज के एक कोण के कोसाइन को उसकी भुजाओं के साइन और कोसाइन के पदों में प्रकट करना।

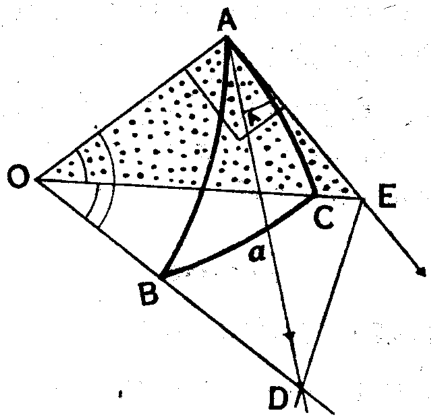
मान लो ABC एक गोलीय त्रिभुज है जिसकी भुजाओं BC, CA और AB के कोणीय माप क्रमशः a, b, c हैं। अर्थात

$$\text{समतल कोण } AOC = b$$

$$BOC = a$$

$$AOB = c$$

मान लो A, B और C त्रिभुज के कोण हैं। A बिन्दु पर चाप AB और AC की स्पर्श रेखाएँ खींचो जो क्रमशः समतल AOB और AOC में OB



आकृति 31

और OC सरल रेखाओं को (आवश्यकतानुसार बढ़ाने पर) क्रमशः D और E बिन्दुओं पर काटती हैं। (यह रचना तब सम्भव है जब भुजाएँ AB और AC प्रत्येक एक चतुर्थांश से कम हों (देखो धारा (4·2.2) की टिप्पणी)। अतः

$$\angle DAE = \angle A \quad \because \text{ धारा } (3{\cdot}1) \text{ और } (2{\cdot}7.2) \text{ (ब)}$$

अब, समतल त्रिभुज ADE और ODE में,

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2AD \,.\, AE \cos A \qquad \text{(i)}$$

और, $$DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2OD \,.\, OE \cos a \qquad \text{(ii)}$$

साथ ही, समकोण त्रिभुज AOD और AOE में,

और $$\left.\begin{aligned} OD^2 &= OA^2 + AD^2 \\ OE^2 &= OA^2 + AE^2 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(iii)}$$

(ii) में से (i) को घटाने और (iii) के उपयोग से,

$$0 = 2OA^2 + 2AD.AE \cos A - 2OD.OE \cos a$$

$$\cos a = \frac{OA \,.\, OA}{OD \,.\, OE} + \frac{AE \,.\, AD}{OD \,.\, OE} \cos A$$

$$=\cos b \cos C+\sin b \sin c \cos A$$

या,
$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

a, b, c और A, B, C को चक्रीय क्रम में बदलने पर, त्रिभुज के प्रत्येक कोण के लिए कोसाइन सूत्र प्राप्त किया जा सकता है। इन सूत्रों को निम्नलिखित दो समुच्चयों में स्मरण रखना उपयोगी सिद्ध होगा।

$$\left.\begin{aligned}\cos a&=\cos b \cos c+\sin b \sin c \cos A\\ \cos b&=\cos c \cos a+\sin c \sin a \cos B\\ \cos c&=\cos a \cos b+\sin a \sin b \cos C\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

और,

$$\left.\begin{aligned}\cos A&=\frac{\cos a-\cos b \cos c}{\sin b \sin c}\\ \cos B&=\frac{\cos b-\cos c \cos a}{\sin c \sin a}\\ \cos C&=\frac{\cos c-\cos a \cos b}{\sin a \sin b}\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

कोसाइन सूत्र गोलीय त्रिकोणमिति का मूल सूत्र (Fundamental Formula) माना गया है। इसकी सहायता से हम दूसरे सभी सूत्रों का निगमन पर सकते हैं।

4·2.2 टिप्पणी—पिछली धारा की रचना में AD और OC के किसी बिन्दु पर मिलने के लिए यह आवश्यक है कि समतल $\angle AOC$ जो भुजा b दर्शाता है, एक समकोण से कम हो अर्थात् भुजा AC एक चतुर्थांश से कम हो। क्योंकि, मान लो भुजा $AC=b=\angle AOC=\pi/2$ और AE, चाप AC को स्पर्श रेखा है इसलिए, $\angle OAE=\pi/2$। इस प्रकार हम देखते हैं कि OC और OD दो समानान्तर रेखाएँ हैं जिनका कटन बिन्दु सम्भव नहीं। और यदि भुजा $AC=b>\pi/2$ हो तो AE और OC को विपरीत दिशा में बढ़ाने पर वे कहीं मिलेंगी, जिसकी कल्पना हमने नहीं की है। इसी प्रकार, D बिन्दु भी तब सम्भव है जब भुजा AB एक चतुर्थांश से कम हो। अतः उपर्युक्त धारा में स्थापित कोसाइन सूत्र की सत्यता निम्नलिखित प्रतिबन्ध के अन्तर्गत प्रतिबन्धित है।

प्रतिबन्ध—" कोण A की आसन्न भुजाएँ एक चतुर्थांश से कम हैं।"

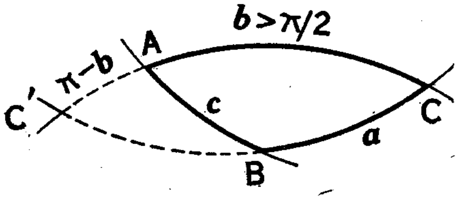
सूत्र की व्यापकता स्थापित करने के लिए उसे प्रतिबन्ध-मुक्त करना अनिवार्य है। हम उपर्युक्त प्रतिबन्ध को चार विभिन्न स्थितियों में निम्नानुसार विभाजित कर सकते हैं :

(i) $\angle A$ की आसन्न भुजाओं में से केवल एक भुजा चतुर्थांश से बड़ी हो।

(ii) $\angle A$ की दोनों आसन्न भुजाएँ चतुर्थांश से बड़ी हों।

(iii) $\angle A$ की आसन्न भुजाओं में एक भुजा चतुर्थांश के बराबर हो।

(iv) $\angle A$ की दोनों आसन्न भुजाएँ चतुर्थांश के बराबर हों।



आकृति 32

(i) मान लो, त्रिभुज ABC में भुजा $AC=b>\pi/2$

CA और CB को बढ़ाओ जो C' बिन्दु पर मिलती हैं। मान लो, ABC' त्रिभुज में $AC'=b'$ और $BC'=a'$ तथा $\angle BAC'=A'$ है। तब

$$b'=\pi-b<\pi/2 \qquad \because CC' \text{ एक अर्धवृत्त है।}$$

$$a'=\pi-a<\pi/2$$

और, $$\angle A'=\pi-A \qquad \because A \text{ और } A' \text{ आसन्न कोण हैं।}$$

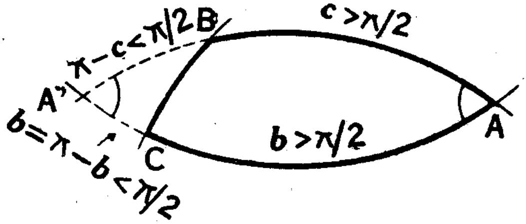
अब, त्रिभुज ABC' में A' की आसन्न भुजाएँ b' और c चतुर्थांश से कम हैं। इसलिए कोसाइन सूत्र से,

$$\cos a'=\cos b' \cos c+\sin b' \sin c \cos A'$$

या, $$\cos(\pi-a)=\cos(\pi-b)\cos c+\sin(\pi-b)\sin c \cos(\pi-A)$$

या, $$\cos a=\cos b \cos C+\sin b \sin c \cos A$$

अतः कोसाइन सूत्र स्थिति (i) में सत्य प्रमाणित होता है।



आकृति 33

(ii) मान लो त्रिभुज ABC में,

$$b>\frac{\pi}{2} \quad \text{और} \quad c>\frac{\pi}{2}$$

AB और AC को बढ़ाओ। मान लो, वे A' बिन्दु पर मिलती हैं। त्रिभुज $A'BC$ में,

$$A'B=\pi-c<\frac{\pi}{2} \qquad \because c>\frac{\pi}{2}, \text{ दिया है।}$$

$$A'C=\pi-b<\frac{\pi}{2} \qquad \because b>\frac{\pi}{2}, \text{ दिया है।}$$

$$BC=a$$

और, $$\angle A'=A \qquad \because \text{ इंदुक के कोण।}$$

अतः त्रिभुज $A'BC$ के कोण A' की आसन्न भुजाएँ एक चतुर्थांश से कम हैं। इसलिए कोसाइन सूत्र से

$$\cos a=\cos(\pi-b)\cos(\pi-c)+\sin(\pi-b)\sin(\pi-c) \times \cos A'$$

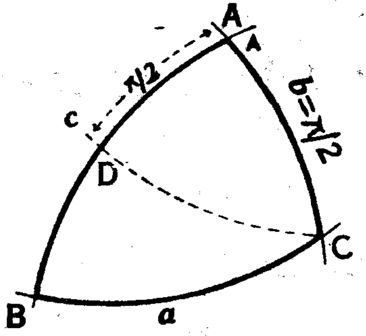
$$=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A.$$

अतः कोसाइन सूत्र की सत्यता इस स्थिति में भी प्रमाणित हो जाती है।

(iii) मान लो त्रिभुज ABC में,

$$AC=b=\pi/2$$

A बिन्दु से AB पर (यदि आवश्यकता हो तो AB को बढ़ाकर) $AD=\frac{\pi}{2}$ काटो और CD को मिलाओ।



आकृति 34

यहाँ दो स्थितियाँ उत्पन्न हो सकती हैं।

(अ) $CD=\frac{\pi}{2}$ और (ब) $CD\neq\frac{\pi}{2}$

(अ) मान लो $CD=\pi/2$

और $AC=\frac{\pi}{2}$ ∵ दिया है।

इसलिए प्रमेय (6) से, बिन्दु C चाप AB का एक ध्रुव है।

∴ $CB=a=\pi/2$

और $CD=\pi/2$

चूँकि, $AC=\pi/2$ ∵ दिया है।

$AD=\pi/2$ ∵ रचना से।

∴ बिन्दु A चाप CD का ध्रुव है

∴ $\angle A=$ चाप $CD=\pi/2$

अतः कोसाइन सूत्र में, जिसकी सत्यता प्रमाणित करना है, मान रखने पर,

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$$

या, $\cos \pi/2 = \cos \pi/2 \cos c + \sin \pi/2 \sin c \cos \pi/2$

या, $0 = 0$

अतः सूत्र उपर्युक्त स्थिति के लिए सत्य प्रमाणित होता है।

(ब) मान लो $CD \neq \pi/2$, (अ) में हम स्थापित कर चुके हैं कि A, चाप DC का ध्रुव है और C, चाप AB का ध्रुव है।

∴ त्रिभुज BDC में

$$CD = A, \quad \angle CDB = \pi/2,$$

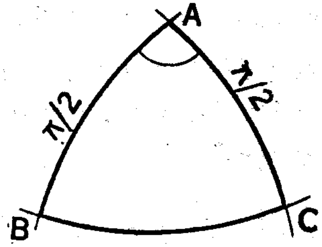
अब कोण BDC के लिए कोसाइन सूत्र लगाने पर,

$$\cos BC = \cos BD \cos DC + \sin BD \sin DC \cos CDB$$

या $\cos a = \cos (a \sim \pi/2) \cos A + \sin BD \sin DC \cos \pi/2$

$$= \sin a \cos A$$

और A के कोसाइन सूत्र (1) में भी यदि $b = \pi/2$ रखें तो हमें यही सम्बन्ध मिलता है। अतः कोसाइन सूत्र की सत्यता इस स्थिति में भी यथावत है।



आकृति 35

(iv) मान लो त्रिभुज ABC में,

$$b = \pi/2 \text{ और } c = \pi/2$$

कोण A के कोसाइन सूत्र में मान रखने पर,

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

या, $\cos a = \cos \pi/2 \cos \pi/2 + \sin \pi/2 \sin \pi/2 \cos A$

या, $\cos a = \cos A$

∴ $a = A$

जो सत्य है क्योंकि कल्पना से A, चाप BC का एक ध्रुव है।

(i), (ii), (iii) और (iv) से हम कह सकते हैं कि कोसाइन सूत्र व्यापक रूप में सत्य है।

4·2.3. कोसाइन सूत्र समूह (1) और (2) से स्पष्ट है कि (i) यदि किसी त्रिभुज में एक कोण और उसकी आसन्न भुजाओं के मान ज्ञात हों तो कोण की सम्मुख भुजा का मान ज्ञात कर सकते हैं। (ii) यदि त्रिभुज की तीनों भुजाओं के मान ज्ञात हों तो कोणों के मान ज्ञात कर सकते हैं।

कोसाइन सूत्र की उपयोगिता और व्यापकता निम्नलिखित कुछ उदाहरणों से स्पष्ट हो जायेगी। जैसे—सरल त्रिकोणमिति का परिणाम,

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\cos A$$

जहाँ α, β, γ समतल त्रिभुज की भुजाएँ हैं, कोसाइन सूत्र द्वारा स्थापित किया जा सकता है।

उदाहरण 1. गोलीय त्रिभुज के कोसाइन सूत्र का संगत सूत्र समतल त्रिभुज के लिए स्थापित करो।

क्रिया—गोलीय त्रिभुज का कोसाइन सूत्र,

$$\cos a=\cos b\cos C+\sin b\sin c\cos A.$$

मान लो, गोलीय त्रिभुज ABC एक गोले पर स्थित है जिसकी त्रिज्या r है। मान लो, भुजाओं के चाप AB, BC और CA की लम्बाईयाँ क्रमशः α, β, γ हैं। अतः गोलीय त्रिभुज की भुजाएँ,

$$a=\frac{\alpha}{r},\quad b=\beta/r,\quad c=\frac{\gamma}{r}.$$

सरल त्रिकोणमिति के साइन और कोसाइन फलनों के प्रसार से,

$$\cos a=\cos(\alpha/r)=1-\frac{1}{2!}\frac{\alpha^2}{r^2}+\dots.$$

$$\sin b=\sin(\beta/r)=\beta/r-\frac{1}{3!}\frac{\beta^3}{r^3}+\dots.$$

कोसाइन सूत्र में मान रखने पर,

$$\Big(1-\frac{1}{2!}\frac{\alpha^2}{r^2}+\dots.\Big)=\Big(1-\frac{1}{2!}\frac{\beta^2}{r^2}+\dots.\Big(1-\frac{1}{2!}\frac{\gamma^2}{r^2}+\dots.\Big)$$

$$+\Big(\frac{\beta}{r}-\frac{1}{3!}\frac{\beta^3}{r^3}+\dots.\Big)\Big(\frac{\gamma}{r}-\frac{1}{3!}\frac{\gamma^3}{r^3}+\dots.\Big)\cos A \qquad \dots \qquad \text{(i)}$$

अब कल्पना करो कि गोले की त्रिज्या अनन्त की ओर प्रवृत्त होती है अर्थात $r \to \infty$ और α, β, γ अचर रहते हैं; इस स्थिति में गोलीय त्रिभुज एक समतल त्रिभुज की ओर प्रवृत्त होगा जिसकी भुजाओं की लम्बाइयाँ क्रमशः α, β, γ होंगी। अतः (i) को सरल करने पर,

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos A + \frac{k}{r^2}$$

यहाँ k एक परिमित राशि है जिसका मान r के मान के साथ अनन्त की ओर प्रवृत्त नहीं होता है। अतः r के अनन्त की ओर प्रवृत्त होने का सीमांत मान या, सीमा $r \to \infty$, ज्ञात करने पर,

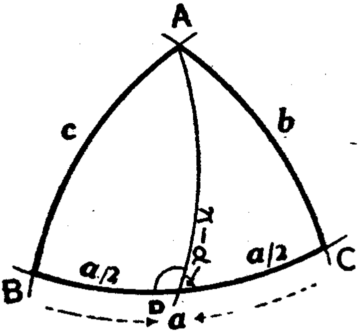
$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos A$$

जो समतल त्रिभुज के लिए कोसाइन सूत्र है।

उदाहरण 2. (अ) गोलीय त्रिभुज ABC में यदि बिन्दु D, भुजा BC का मध्य बिन्दु है तो सिद्ध करो कि,

$$\cos AD = \frac{\cos b + \cos c}{2 \cos \frac{a}{2}}$$ [सागर, '64]

(ब) सूत्र (अ) का सगंत सूत्र समतल त्रिभुज के लिए ज्ञात करो।



आकृति 36

(अ) मान लो a, b, c त्रिभुज ABC की भुजाएँ हैं। D, BC का मध्य बिन्दु है। अर्थात,

$$BD = DC = a/2.$$

त्रिभुज ABD और ADC में क्रमशः $\angle D$ और $\angle(\pi-D)$ के लिये कोसाइन सूत्र से,

$$\cos AB=\cos AD\cos BD+\sin AD\sin BD\cos D\;\ldots\;\text{(i)}$$

और, $\cos AC=\cos AD\cos CD+\sin AD\sin CD\cos(\pi-D)$ (ii)

परन्तु, $\qquad DC=BD,\ \cos(\pi-D)=-\cos D$

$$\therefore\ \cos AC=\cos AD\cos DC-\sin AD\sin BD\cos D\ \text{(iii)}$$

(i) और (iii) को जोड़ने से,

$$\begin{aligned}\cos AC+\cos AB&=\cos AD\cos BD+\cos AD\cos DC\\&=\cos AD(\cos BD+\cos DC)\\&=\cos AD\,.\,2\,.\cos\left(\frac{BD+DC}{2}\right)\cos\left(\frac{BD-DC}{2}\right)\\&=2\cos AD\cos\frac{BC}{2}\qquad\because\ BD=DC\end{aligned}$$

$$\therefore\qquad \cos AD=\frac{\cos AC+\cos AB}{2\cos\frac{BC}{2}}$$

या, मान रखने पर,

$$\cos AD=\frac{\cos b+\cos c}{2\cos\frac{a}{2}}$$

(ब) मान लो मध्यगत रेखा AD के चाप की लम्बाई δ है और α, β, γ त्रिभुज की भुजाओं के चापों की लम्बाइयाँ हैं। यदि गोले की त्रिज्या r है तो,

$$\cos b=\cos(\beta/r)=1-\frac{1}{2!}\beta^2/r^2+\ldots$$

$$\cos c=\cos(\gamma/r)=1-\frac{1}{2!}r^2/r^2+\ldots$$

$$\cos a/2=\cos(\alpha/2r)=1-\frac{1}{2!}\frac{(\alpha/2)^2}{r^2}+\ldots$$

$$\cos AD=\cos(\delta/r)=1-\frac{1}{2!}\frac{\delta^2}{r^2}+\ldots$$

(अ) में स्थापित परिणाम में मान रखने पर,

$$2\left(1-\frac{1}{2!}\delta^2/r^2+\ldots\right)\left(1-\frac{1}{2!}-\frac{(\alpha/2)^2}{r^2}+\ldots\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2!}\beta^2/r^2+\ldots\right)+\left(1-\frac{1}{2!}\gamma^2/r^2+\ldots\right.$$

या, $$2\left(1-\frac{1}{4(2!)}\frac{\alpha^2}{r^2}-\frac{1}{2!}\delta^2/r^2+\ldots\right)=2-\frac{1}{2!}\beta^2/r^2-\frac{1}{2!}\frac{\gamma^2}{r^2}+\ldots$$

जब, $r\to\infty$ और α, β, γ, अचर रहते हैं तब गोलीय त्रिभुज ABC, समतल त्रिभुज की ओर प्रवृत्त होता है। अतः $r\to\infty$ सीमान्त मान ज्ञात करने पर,

$$2\{(\alpha/2)^2+\delta^2\}=\tfrac{1}{2}[\beta^2+\gamma^2]$$

अतः समतल त्रिभुज की दो भुजाओं के वर्गों का योग, तीसरी भुजा के आधे के वर्ग और उसकी मध्यगत रेखा के वर्ग के योगफल के आधे के बराबर होता है।

उदाहरण 3. समत्रिबाहु गोलीय त्रिभुज ABC में सिद्ध करो कि,

$$\tan^2 a/2=1-2\cos A$$

इस परिणाम से किसी समत्रिबाहु गोलीय त्रिभुज के कोणों और भुजाओं की अधिकतम और न्यूनतम सीमाएँ निर्धारित करो। मान लो, गोलीय त्रिभुज ABC में,

$$a=b=c,$$

$$\therefore \quad 1-2\cos A=1-2\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c} \qquad \because \text{ सूत्र (2)}$$

$$=1-2\frac{\cos a-\cos^2 a}{\sin^2 a}$$

$$=1-\frac{2\cos a}{1+\cos a}$$

$$=\frac{1-\cos a}{1+\cos a}=\tan^2\frac{a}{2} \qquad \ldots \quad \text{(i)}$$

चूंकि $\tan^2 \frac{a}{2}$ पूर्ण वर्ग होने से अवश्य ही धनात्मक राशि है

$$\therefore \qquad 1-2\cos A>0$$

$$\text{या,} \qquad \cos A<1/2$$

$$\therefore \qquad A>\pi/3$$

इसी प्रकार हम स्थापित कर सकते हैं कि $B>\frac{\pi}{3}$ और $C>\frac{\pi}{3}$ ।

चूंकि किसी गोलीय त्रिभुज की भुजाएँ और कोण परिपाटी के अनुसार क्रमशः अर्धवृत्त और π से कम होते हैं अतः हम निष्कर्ष निकालते हैं कि समत्रिबाहु गोलीय त्रिभुज के कोण $\pi/3$ और π सीमाओं के अन्दर होते हैं ।

परिणाम (i) में,

$$\left(\tan^2 \frac{a}{2}\right) \text{ का अधिकतम मान} = (1-2\cos A) \text{ का अधिकतम मान}$$

$$=1-2(-1)$$

$$=3$$

$$\therefore \qquad \tan\frac{a}{2}=\sqrt{3}$$

$$\text{या,} \qquad \frac{a}{2}=\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \qquad a=2\pi/3$$

$$=120^\circ$$

अर्थात, समत्रिबाहु त्रिभुज की भुजा का अधिकतम मान $2\pi/3$ हो सकता है । स्पष्टतः भुजाओं का न्यूनतम मान शून्य हो सकता है ।

उदाहरण 4. गोलीय त्रिभुज ABC में यदि $A=a$ हो तो सिद्ध करो कि,

$$\tan\frac{a}{2}=\frac{\tan\frac{b}{2}\sim\tan\frac{c}{2}}{1-\tan\frac{b}{2}\tan\frac{c}{2}}$$

क्रिया—कोण A के लिए कोसाइन सूत्र लगाने पर,

$$\cos a = \cos b \cos C + \sin b \sin c \cos A$$

परन्तु, $$A = a,$$

$\therefore$ $$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos a$$

या, $$\cos a (1 - \sin b \sin c) = \cos b \cos c$$

$\therefore$ $$\cos a = \frac{\cos b \cos c}{1 - \sin b \sin c} \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

सरल त्रिकोणमिति से हम जानते हैं कि,

$$\tan^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}$$

(i) से $\cos a$ का मान रखने पर,

$$\tan^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \dfrac{\cos b \cos c}{1 - \sin b \sin c}}{1 + \dfrac{\cos b \cos c}{1 - \sin b \sin c}}$$

$$= \frac{1 - \sin b \sin c - \cos b \cos c}{1 - \sin b \sin c + \cos b \cos c}$$

$$= \frac{1 - \cos (b \sim c)}{1 + \cos (b + c)},$$ $(b \sim c)$ धनात्मक अन्तर दर्शाता है।

$$= \frac{2 \sin^2 \dfrac{b \sim c}{2}}{2 \cos^2 \dfrac{b + c}{2}}$$

$\therefore$ $$\tan^2 \frac{a}{2} = \frac{\text{in} \dfrac{b \sim c}{2}}{\cos \dfrac{b + c}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\sim\cos\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}{\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}-\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}$$

अंश और हर को $\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b$ से भाग देने पर,

$$\tan\frac{a}{2}=\frac{\tan\frac{b}{2}\sim\tan\frac{c}{2}}{1-\tan\frac{b}{2}\tan\frac{c}{2}}$$

विकल्प विधि। हम (i) में स्थापित कर चुके हैं कि,

$$\cos a=\frac{\cos b\cos c}{1-\sin b\sin c}\quad\ldots\quad(1)$$

सरल त्रिकौणमिति से,

$$\sin 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\quad\ldots\quad(2)$$

और,

$$\cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\quad\ldots\quad(3)$$

मान लो, x, y और z क्रमशः $\tan\frac{1}{2}a$, $\tan\frac{1}{2}b$ और $\tan\frac{1}{2}c$ दर्शाते हैं। (1) में (2) और (3) से मान रखने पर,

$$\frac{1-x^2}{1+x^2}=\frac{\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)}{1-\left(\frac{2y}{1+y^2}\right)\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)}$$

$$=\frac{1-y^2-z^2+y^2z^2}{1+y^2+z^2+y^2z^2-4yz}$$

योगान्तरानुपात (Componendo et Dividendo) से,

$$\frac{(1+x^2)-(1-x^2)}{(1+x^2)+(1-x^2)}$$

$$=\frac{1+y^2+z^2+y^2z^2-4yz-(1-y^2-z^2+y^2z^2)}{1+y^2+z^2+y^2z^2-4yz+(1-y^2-z^2+y^2z^2)}$$

$$\therefore \qquad x^2=\frac{y^2+z^2-y^3}{1+y^2\,z^2-2yz}$$

$$=\frac{(y-z)^2}{(1-yz)^2}$$

$$\therefore \qquad x=\pm\frac{y-z}{1-yz}=\frac{y\sim z}{1-yz}$$

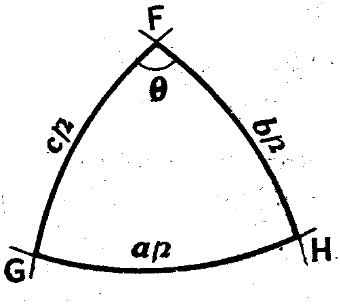
पुनः x, y, z के मान रखने पर,

$$\tan\frac{a}{2}=\frac{\tan\frac{b}{2}\sim\tan\frac{c}{2}}{1-\tan\frac{b}{2}\,\tan\frac{c}{2}}$$

उदाहरण 5. गोलीय त्रिभुज ABC की भुजाओं a, b, c को आधा करके एक नये त्रिभुज की रचना की गई। यदि नये त्रिभुज की $\frac{b}{2}$ और $\frac{c}{2}$ भुजाओं के बीच का कोण θ है तो सिद्ध करो कि

$$\cos\theta=\cos A+\tfrac{1}{2}\tan\tfrac{1}{2}b\tan\tfrac{1}{2}c\sin^2\theta$$

[सागर, '57, आगरा, '58]



आकृति 37

मान लो, नया त्रिभुज FGH है।

त्रिभुज ABC में कोसाइन सूत्र से,

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{\left(2\cos^2\frac{a}{2}-1\right)-\left(2\cos^2\frac{b}{2}-1\right)\left(2\cos^2\frac{c}{2}-1\right)}{4\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

$$=\frac{2\cos^2\frac{a}{2}-4\cos^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{c}{2}+2\cos^2\frac{b}{2}+2\cos^2\frac{c}{2}-2}{4\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}} \quad (1)$$

त्रिभुज FGH में, कोसाइन सूत्र से,

$$\cos\theta=\frac{\cos\tfrac{1}{2}a-\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}{\sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c} \quad .\ .\ .\ (2)$$

$$\therefore \quad \sin^2\theta=1-\left[\frac{\cos\tfrac{1}{2}a-\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}{\sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c}\right]^2$$

$$=\frac{\sin^2\tfrac{1}{2}b\sin^2\tfrac{1}{2}c-\cos^2\tfrac{1}{2}a-\cos^2\tfrac{1}{2}b\cos^2\tfrac{1}{2}c+2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}{\sin^2\tfrac{1}{2}b\sin^2\tfrac{1}{2}c}$$

$$=\frac{1-\cos^2\tfrac{1}{2}a-\cos^2\tfrac{1}{2}b-\cos^2\tfrac{1}{2}c+2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}{\sin^2\tfrac{1}{2}b\sin^2\tfrac{1}{2}c} \quad (3)$$

अब (1) और (2) से,

$$\cos\theta-\cos A=\frac{\cos\tfrac{1}{2}a-\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}{\sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c}$$

$$-\left[\frac{2\cos^2\tfrac{1}{2}a+2\cos^2\tfrac{1}{2}b+2\cos^2\tfrac{1}{2}c-4\cos^2\tfrac{1}{2}b\cos^2\tfrac{1}{2}c-}{4\sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}\right]$$

$$=\frac{4\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c-4\cos^2\tfrac{1}{2}b\cos^2\tfrac{1}{2}c-2\cos^2\tfrac{1}{2}a-2\cos^2\tfrac{1}{2}b-2\cos^2\tfrac{1}{2}c+4\cos^2\tfrac{1}{2}b\cos^2\tfrac{1}{2}c+2}{4\sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}$$

$$=\frac{1-\cos^2\frac{a}{2}-\cos^2\frac{b}{2}-\cos^2\frac{c}{2}+2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}{2\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

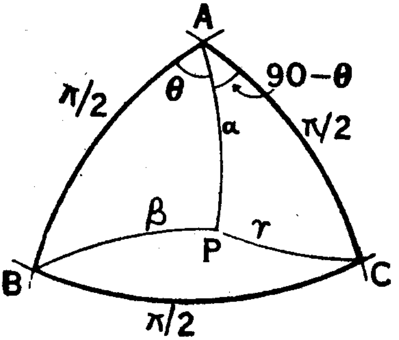
$$=\sin^2\theta\left[\frac{\sin b/2 \sin c/2}{2\cos b/2 \cos c/2}\right] \qquad \because \quad (3) \text{ से}$$

$$=\tfrac{1}{2}\sin^2\theta. \tan\frac{b}{2}\tan\frac{c}{2}$$

$$\therefore \qquad \cos\theta=\cos A+\tfrac{1}{2}\tan\frac{b}{2}\tan\frac{c}{2}\sin^2\theta$$

उदाहरण 6. एक गोलीय त्रिभुज की प्रत्येक भुजा एक चतुर्थांश के बराबर है। त्रिभुज के अन्दर किसी बिन्दु से उसके शीर्ष बिन्दुओं को मिलाने वाले चाप क्रमशः α, β, γ हैं। सिद्ध करो कि,

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$



आकृति 38

मान लो त्रिभुज ABC में,

$$AB=BC=CA=\pi/2$$

और P, त्रिभुज ABC के अन्दर कोई बिन्दु है जिसे शीर्षों से मिलाने पर,

चाप $PA=\alpha$

चाप $PB=\beta$

और, चाप $PC=\gamma$

सिद्ध करना है—$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

उपपत्ति—चूंकि $AB=AC=\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore$ बिन्दु A, BC का एक ध्रुव है

और चूंकि $\qquad BC=\pi/2$

$\therefore \qquad \angle A=90°$

अब मान लो, कोण $PAB=\theta$

तो $\qquad PAC=90°-\theta$

त्रिभुज PAB और PAC में क्रमशः कोसाइन सूत्र द्वारा,

$$\cos\beta=\cos\alpha\cos\pi/2+\sin\alpha\sin\pi/2\cos\theta$$

$$=\sin\alpha\cos\theta \qquad \ldots \text{(i)}$$

और, $$\cos\gamma=\sin\alpha\sin\theta \qquad \ldots \text{(ii)}$$

(i) और (ii) का वर्ग करके जोड़ने पर,

$$\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\sin^2\alpha\cos^2\theta+\sin^2\alpha\sin^2\theta$$

$$=\sin^2\alpha$$

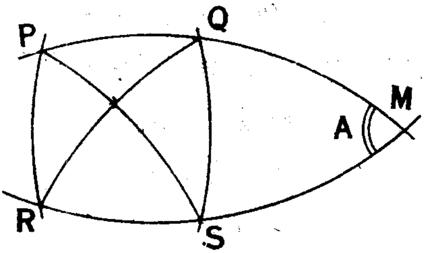
$$=1-\cos^2\alpha$$

$$\therefore \qquad \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

उदाहरण 7. P, Q, R, S एक गोले पर स्थित चार बिन्दु हैं। यदि PQ और RS चापों के बीच का कोण A है तो सिद्ध करो कि,

$$\cos PR\cos QS-\cos PS\cos QR=\sin PQ\sin RS\cos A$$

[सागर, '63]



आकृति 39

मान लो चाप PQ और RS को बढ़ाने पर वे M बिन्दु पर मिलते हैं और

उनके बीच का कोण A है। अब दिये हुए बिन्दुओं और बिन्दु M द्वारा बने उन गोलीय त्रिभुजों में जिसका एक कोण A है, कोसाइन सूत्र लगाने पर,

$$\cos PR = \cos PM \cos RM + \sin PM \sin RM \cos A \quad (1)$$

$$\cos QS = \cos QM \cos SM + \sin QM \sin SM \cos A \quad (2)$$

$$\cos QR = \cos QM \cos RM + \sin QM \sin RM \cos A \quad (3)$$

$$\cos PS = \cos PM \cos SM + \sin PM \sin SM \cos A \quad (4)$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \cos PR \cos QS = {} & \cos PM \cos RM \cos QM \cos SM \\ & + \cos PM \cos RM \sin QM \sin SM \cos A \\ & + \cos QM \cos SM \sin PM \sin RM \cos A \\ & + \sin PM \sin RM \sin QM \sin SM \cos^2 A\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{और, } \cos PS \cos QR = {} & \cos PM \cos SM \cos QM \cos RM \\ & + \cos QM \cos RM \sin PM \sin SM \cos A \\ & + \cos PM \cos SM \sin QM \sin RM \cos A \\ & + \sin PM \sin SM \sin QM \sin RM \cos^2 A\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \cos PR \cos QS - \cos PS \cos QR = {} & \cos PM \sin QM \cos A \\ & (\cos RM \sin SM - \cos SM \sin RM) \\ & + \cos QM \sin PM \cos A (\cos SM \sin RM \\ & - \sin SM \cos RM) \\ = {} & \cos PM \sin QM \cos A (-\sin RS) \\ & + \cos QM \sin PM \cos A (\sin RS) \\ = {} & \sin RS \cos A (\cos QM \sin PM \\ & - \cos PM \sin QM) \\ = {} & \sin PQ \sin RS \cos A\end{aligned}$$

प्रश्न संग्रह 2

1. गोलीय त्रिभुज ABC में यदि $b+c=\frac{\pi}{2}$ है तो सिद्ध करो कि,

$$\cos a = \sin 2c \cos^2 \frac{A}{2}$$

2. गोलीय त्रिभुज ABC में सिद्ध करो कि,

$$\cos a = \cos(b+c) + 2\sin b \sin c \cos^2 \frac{A}{2}$$

[संकेत—सरल त्रिकोणमिति के सूत्र—$2\cos^2 \frac{1}{2}A = 1 + \cos A$ में कोसाइन सूत्र से $\cos A$ का मान रखो।]

3. एक गोलीय त्रिभुज की दो भुजाओं का योग यदि वृत्त की अर्धपरिधि के बराबर हो (अर्थात वे एक दूसरे की सम्पूरक हों) तो सिद्ध करो कि शीर्ष को आधार (तीसरी शेष भुजा) के मध्य बिन्दु से मिलाने वाला चाप एक चतुर्थांश के तुल्य होगा।

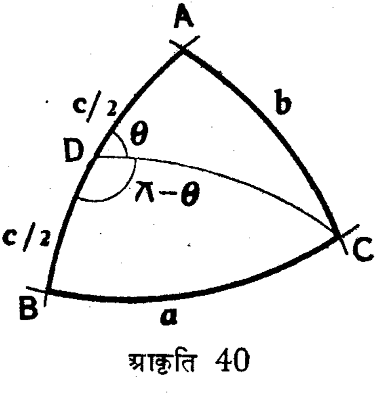
या

यदि बिन्दु D, त्रिभुज ABC के आधार AB का मध्य बिन्दु है और CA, CD और CB समानान्तर श्रेणी में हैं तो सिद्ध करो कि CD एक चतुर्थांश के तुल्य है। [जबलपुर, '59]

[संकेत—

$$a + b = \pi$$

$$AD = BD = \tfrac{1}{2}c$$



आकृति 40

उदाहरण 2 से,

$$\cos a + \cos b = 2\ DC \cos \frac{c}{2}$$

$$\cos a = \cos(\pi - b) = -\cos b$$

$\therefore$ $$\cos a+\cos b=0$$

$\therefore$ $$\cos \tfrac{1}{2}c \cos CD=$$

$\therefore$ $$CD=\frac{\pi}{2}$$

क्योंकि यदि $$\cos \frac{c}{2}=0$$

तो, $$\frac{c}{2}=\frac{\pi}{2}$$

या, $c=\pi$, जो असम्भव है।

अब, $a+b=\pi$ और $DC=\frac{\pi}{3}$

$\therefore$ $$a+b=2DC$$

अतः CA, CD और CB समान्तर श्रेणी में हैं।]

4. गोलीय त्रिभुज ABC की भुजा BC पर बिन्दु D, कोई स्वेच्छ बिन्दु है। सिद्ध करो कि

$$\cos AD \sin BC=\cos AB \sin CD+\cos AC \sin BD$$

[जबलपुर, '60]

5. गोलीय त्रिभुज ABC की भुजा AB पर P, बिन्दु इस प्रकार लिया गया है कि AP और AC चाप बराबर हैं। सिद्ध करो कि

$$\cos c \cos CP=\cos a \sin b+\cos b \sin (c-b)$$

6. एक गोलीय समत्रिबाहु गोलीय त्रिभुज ABC में सिद्ध करो कि,

(i) $2 \cos \tfrac{1}{2}a \sin \tfrac{1}{2}A=1$

(ii) $\sec A=1+\sec a$

(iii) $\log \sin \tfrac{1}{2}A+\log \cos \tfrac{1}{2}a+\log 2=0$

7. बिन्दु D और E एक समत्रिबाहु त्रिभुज ABC की भुजा AB और AC के मध्य बिन्दु हैं। सिद्ध करो कि,

$$\sin DE/2=\tfrac{1}{2} \tan \tfrac{1}{2}a$$

8. A और A' क्रमशः एक समत्रिबाहु गोलीय त्रिभुज और उसके ध्रुवीय त्रिभुज के कोण हैं। सिद्ध करो कि,

$$\cos A \cos A' = \cos A + \cos A'$$

[संकेत—उदाहरण 3 से, $\cos A = \dfrac{\cos a}{1+\cos a}$

और, $A' = \pi - a$, इसलिए $\cos A' = -\cos a$

$$\therefore \quad \cos A + \cos A' = \frac{\cos a}{1+\cos a} - \cos a = \frac{-\cos^2 a}{1+\cos a}$$

$$= \cos A \cos A']$$

9. गोलीय त्रिभुज ABC में सिद्ध करो कि,

$$\tan b = \frac{\tan a \cos C + \tan c \cos A}{1 - \tan a \tan c \cos A \cos C}$$

$$= \frac{\cot c \cos C + \cot a \cos A}{\cot a \cot c - \cos A \cos C}$$ [सागर, '51]

या, $b = \tan^{-1} (\tan a \cos C) + \tan^{-1} (\tan c \cos A)$

[संकेत—दाहिने पक्ष के अंश और हर में कोसाइन सूत्र से मान रखकर, पृथक-पृथक हल करो। कोटेन्जेट सूत्र द्वारा भी यह प्रश्न किया जा सकता है। देखो प्रश्न संग्रह 4, प्रश्न 9]

10. गोलीय त्रिभुज ABC में सिद्ध करो कि

$$2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \tan \frac{c}{2}$$

$$= \sin b \cos A + \sin a \cos B$$ [सागर, '64]

[संकेत—दाहिने पक्ष में कोसाइन सूत्र से मान रखकर सरल करो।]

11. गोले के पृष्ठ पर, चतुर्थांश लम्बाई के AB और CD चाप एक दूसरे को E बिन्दु पर काटते हैं। यदि इन चापों के छोर दीर्घवृत्तों द्वारा मिलाये जायँ तो सिद्ध करो कि,

$$\cos AEC = \cos AC \cos BD - \cos BC \cos AD$$

[इन्दौर, '66]

$\therefore \qquad \cos a+\cos b=0$

$\therefore \qquad \cos \frac{1}{2}c \cos CD=$

$\therefore \qquad CD=\frac{\pi}{2}$

क्योंकि यदि $\qquad \cos \frac{c}{2}=0$

तो, $\qquad \frac{c}{2}=\frac{\pi}{2}$

या, $\qquad c=\pi$, जो असम्भव है।

अब, $\qquad a+b=\pi$ और $DC=\frac{\pi}{3}$

$\therefore \qquad a+b=2DC$

अतः $\qquad CA$, CD और CB समान्तर श्रेणी में हैं।]

4. गोलीय त्रिभुज ABC की भुजा BC पर बिन्दु D, कोई स्वेच्छ बिन्दु है। सिद्ध करो कि

$$\cos AD \sin BC=\cos AB \sin CD+\cos AC \sin BD$$

[जबलपुर, '60]

5. गोलीय त्रिभुज ABC की भुजा AB पर P, बिन्दु इस प्रकार लिया गया है कि AP और AC चाप बराबर हैं। सिद्ध करो कि

$$\cos c \cos CP=\cos a \sin b+\cos b \sin (c-b)$$

6. एक गोलीय समत्रिबाहु गोलीय त्रिभुज ABC में सिद्ध करो कि,

(i) $2 \cos \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}A=1$

(ii) $\sec A=1+\sec a$

(iii) $\log \sin \frac{1}{2}A+\log \cos \frac{1}{2}a+\log 2=0$

7. बिन्दु D और E एक समत्रिबाहु त्रिभुज ABC की भुजा AB और AC के मध्य बिन्दु हैं। सिद्ध करो कि,

$$\sin DE/2=\frac{1}{2} \tan \frac{1}{2}a$$

13. गोलीय त्रिभुज ABC के शीर्ष A और B से खींची गई मध्यगत रेखाएँ यदि बराबर हों तो सिद्ध करो कि,

या तो $a=b$,

अथवा, $\sin^2 \frac{1}{2}c=\cos^2 \frac{1}{2}a+\cos^2 \frac{1}{2}b+\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b$

[संकेत—मध्यगत रेखाओं के मान कोसाइन सूत्र से लिखो; इनमें आये कोणों के मान फिर कोसाइन सूत्रों से लिखो। अब मध्यगत रेखाओं के मानों को बराबर रखकर हल करो।]

14. एक गोलीय त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाले चापों की लम्बाइयाँ क्रमशः θ, ϕ और ψ हैं। सिद्ध करो कि,

$$\frac{\cos \theta}{\cos \frac{1}{2}a}=\frac{\cos \phi}{\cos \frac{1}{2}b}=\frac{\cos \psi}{\cos \frac{1}{2}c}=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}$$

[संकेत—मान लो θ, b और c के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला चाप है तो,

$$\cos \theta=\cos\frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c+\sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c \cos A$$

अब, कोसाइन सूत्र से $\cos A$ का मान रखकर हल करो।]

15. एक गोलीय चतुर्भुज की भुजाएँ क्रमशः a, b, c और d हैं। उसके विकर्ण δ और δ' हैं और विकर्णों के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला चाप ϕ है। सिद्ध करो कि,

$$\cos a+\cos b+\cos c+\cos d= 4 \cos \frac{1}{2}\delta \cos \frac{1}{2}\delta' \cos \phi.$$

(ब) तीन कोण और एक भुजा

4·3. सम्पूरक कोसाइन सूत्र (Supplemental cosine formula)

गोलीय त्रिभुज की एक भुजा के कोसाइन को उसके कोणों के साइन और कोसाइन के पदों में प्रकट करना।

मान लो ABC एक गोलीय त्रिभुज है जिसका ध्रुवीय त्रिभुज $A'B'C'$ है। अध्याय 3 के प्रमेय 13 से,

$$\left.\begin{array}{l} a'=\pi-A,\ b'=\pi-B,\ c'=\pi-C \\ A'=\pi-a,\ B'=\pi-b,\ C'=\pi-c \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

अब त्रिभुज $A'B'C'$ में कोसाइन सूत्र द्वारा

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b \sin c' \cos A'$$

(i) से मान रखने पर,

$$\cos(\pi - A) = \cos(\pi - B)\cos(\pi - C) + \sin(\pi - B) \times \sin(\pi - C)\cos(\pi - a)$$

या, $$-\cos A = \cos B \cos C + \sin B \sin c\,(-\cos a)$$

या, $$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

इसी प्रकार या अवयवों को चक्रीय क्रम में बदल कर हम $\cos b$ और $\cos c$ के मान भी ज्ञात कर सकते हैं।

चूंकि उपयु क्त सूत्र, गोलीय त्रिभुज और उसके ध्रुवीय त्रिभुज के अवयवों के परस्पर सम्पूरक होने के गुण द्वारा व्युत्पन्न किया गया है इसलिये इसे **सम्पूरक कोसाइन सूत्र** कहते हैं। इसी प्रकार आगे आने वाले प्रत्येक सूत्र के सम्पूरक सूत्र भी आवश्यकतानुसार ज्ञात किये जा सकते हैं। सम्पूरक कोसाइन सूत्रों को संक्षेप में निम्नलिखित रूप में स्मरण रखना चाहिये।

$$\left.\begin{aligned}\cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a\\ \cos B &= -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b\\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (3)$$

$$\left.\begin{aligned}\cos a &= \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}\\ \cos b &= \frac{\cos B + \cos C \cos A}{\sin C \sin A}\\ \cos c &= \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (4)$$

4·3.1. उदाहरण 1. एक ही आधार BC पर दो गोलीय त्रिभुज ABC और $A'BC$ इस प्रकार के हैं कि

$$\tan B \tan C = \tan B' \tan C'$$

तो सिद्ध करो कि

$$\cos A \cos B' \cos C' = \cos A' \cos B \cos C$$

[जबलपुर, '59, विक्रम, '63]

उपपत्ति—

$$\tan B \tan C = \tan B' \tan C' \qquad \because \text{ दिया है ।}$$

या,
$$\frac{\sin B \sin C}{\cos B \cos C} = \frac{\sin B' \sin C'}{\cos B' \cos C'} \quad . \; . \; . \quad \text{(i)}$$

सम्पूरक कोसाइन सूत्र से त्रिभुज ABC और $A'BC$ में क्रमशः

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

या,
$$\sin B \sin C = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\cos a} \quad . \; . \; . \quad \text{(ii)}$$

और
$$\cos a' = \frac{\cos A' + \cos B' \cos C'}{\sin B' \sin C'}$$

परन्तु दोनों त्रिभुजों का आधार BC उभयनिष्ठ है इसलिए $a = a'$

$\therefore$
$$\sin B' \sin C' = \frac{\cos A' + \cos B' \cos C'}{\cos a} \quad . \; . \; . \quad \text{(iii)}$$

(ii) और (iii) से (i) में मान स्थापित करने पर,

$$\frac{\cos A + \cos B \cos C}{\cos a \cos B \cos C} = \frac{\cos A' + \cos B' \cos C'}{\cos a \cos B' \cos C'}$$

या,
$$\frac{\cos A}{\cos B \cos C} = \frac{\cos A'}{\cos B' \cos C'}$$

या,
$$\cos A \cos B' \cos C' = \cos A' \cos B \cos C$$

वैकल्पिक विधि

सम्पूरक कोसाइन सूत्र से, उभयनिष्ठ भुजा $BC = a = a'$ के कोसाइन के मान दोनों त्रिभुजों से ज्ञात करके उन्हें बराबर करने पर त्रिभुज ABC में,

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

और, त्रिभुज $A'BC$ में,

$$\cos a' = \frac{\cos A' + \cos B' \cos C'}{\sin B' \sin C'}$$

अतः

$$\frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C} = \frac{\cos A' + \cos B' \cos C'}{\sin B' \sin C'}$$

या,

$$\frac{\dfrac{\cos A}{\cos B \cos C} + 1}{\tan B \tan C} = \frac{\dfrac{\cos A'}{\cos B' \cos C'} + 1}{\tan B' \tan C'}$$

परन्तु, $\tan B \tan C = \tan B' \tan C'$ ∵ दिया है।

$$\therefore \quad \frac{\cos A}{\cos B \cos C} = \frac{\cos A'}{\cos B' \cos C'}$$

या, $\cos A \cos B' \cos C' = \cos A' \cos B \cos C$

उदाहरण 2. गोलीय त्रिभुज ABC में सिद्ध करो कि

$\cos a \tan B + \cos b \tan A + \tan C$

$= \cos a \cos b \tan A \tan B \tan C$

[सागर, '66, आगरा, '68]

सम्पूरक कोसाइन सूत्र से,

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

$$\therefore \quad \cos a \tan B = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C} \left(\frac{\sin B}{\cos B}\right)$$

$$= \frac{\cos A}{\cos B \sin C} + \cot C$$

इसी प्रकार,

$$\cos b \tan A = \frac{\cos B}{\cos A \sin C} + \cot C$$

$$\therefore \quad \text{वामपक्ष} = \frac{\cos A}{\cos B \sin C} + \frac{\cos B}{\cos A \sin C} + \frac{2 \cos C}{\sin C} + \frac{\sin C}{\cos C}$$

$$= \frac{\cos^2 A \cos C + \cos^2 B \cos C + 2 \cos A \cos B \cos^2 C + \cos A \cos B \sin^2 C}{\cos A \cos B \cos C \sin C} \qquad \ldots \text{(i)}$$

और सम्पूरक कोसाइन सूत्र से मान रखने पर,

$$\text{दाहिना पक्ष} = \left(\frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}\right)\left(\frac{\cos B + \cos A \cos C}{\sin A \sin C}\right) \times \left(\frac{\sin A \sin B \sin C}{\cos A \cos B \cos C}\right)$$

$$= \frac{\cos A \cos B + \cos^2 A \cos C + \cos^2 B \cos C + \cos A \cos B \cos^2 C}{\cos A \cos B \cos C \sin C}$$

$$= \frac{\cos^2 A \cos C + \cos^2 B \cos C + \cos A \cos B (1 + \cos^2 C)}{\cos A \cos B \cos C \sin C}$$

$$= \frac{\cos^2 A \cos C + \cos^2 B \cos C + \cos A \cos B (\sin^2 C + 2 \cos^2 C)}{\cos A \cos B \cos C \sin C} \qquad \ldots \text{(ii)}$$

$$\because \qquad 1 = \sin^2 C + \cos^2 C$$

(i) और (ii) से,

वाम पक्ष = दाहिना पक्ष

वैकल्पिक विधि

दिये हुए परिणाम को हम निम्नलिखित रूप में भी लिख सकते हैं :

$$\cot C = \frac{\cos a \cos b \tan A \tan B - 1}{\cos a \tan B + \cos b \tan A}$$

मान लो त्रिभुज ABC में शीर्ष C से, चाप CD, भुजा AB पर लम्ब है।

और,

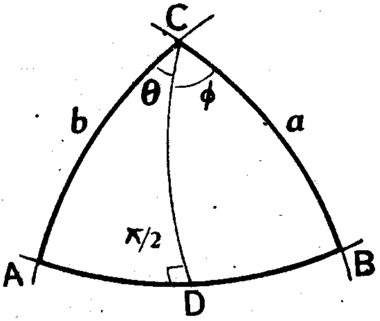
$$\angle ACD = \theta$$

तथा,

$$\angle BCD = \phi$$

अब, त्रिभुज ACD में सम्पूरक कोसाइन सूत्र से,

$$\cos b = \frac{\cos \pi/2 + \cos \theta \cos A}{\sin \theta \sin A}$$



आकृति 42

या, $$\cos \theta \cos A = \sin \theta \cos b \sin A$$

$$\therefore \quad \cot \theta = \cos b \tan A \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

इसी प्रकार, त्रिभुज BCD में,

$$\cot \phi = \cos a \tan B \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

परन्तु, $$\angle C = \angle \theta + \angle \phi$$

$$\therefore \quad \cot C = \cot(\theta + \phi)$$

$$= \frac{\cot \theta \cot \phi - 1}{\cot \theta + \cot \phi}$$

(i) और (ii) से मान रखने पर

$$\cot C = \frac{\cos A \cos b \tan A \tan B - 1}{\cos a \tan B + \cos b \tan A}$$

[**टिप्पणी**—इस प्रश्न को साइन कोसाइन सूत्र द्वारा भी धारा (4·13), उदाहरण 4 में हल किया गया है।]

उदाहरण 3. एक समत्रिबाहु गोलीय त्रिभुज की एक भुजा a और उसके ध्रुवीय त्रिभुज की एक भुजा a' है।

सिद्ध करो कि

$$\cos\frac{a}{2}\cos\frac{a'}{2}=\tfrac{1}{2}$$

क्रिया—त्रिभुजABC में सम्पूरक कोसाइन सूत्र से,

$$\cos a=\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\sin B\sin C}$$

$$=\frac{\cos A+\cos^2 A}{\sin^2 A}$$ ∵ समत्रिबाहु त्रिभुज, समकोणीक भी होता है।

$$=\frac{\cos A(1+\cos A)}{(1-\cos A)(1+\cos A)}$$

$$=\frac{\cos A}{1-\cos A}$$

$$\therefore\quad 2\cos^2\frac{a}{2}=1+\cos a$$

$$=1+\frac{\cos A}{1-\cos A}$$

$$=\frac{1}{1-\cos A}\quad\ldots\quad\text{(i)}$$

ABC के ध्रुवीय त्रिभुज में, प्रमेय 13 से,

$$a'=\pi-A$$

$$\therefore\quad \cos a'=-\cos A$$

$$\therefore\quad 2\cos^2\frac{a}{2}=1+\cos a'$$

$$=1-\cos A\quad\ldots\quad\text{(ii)}$$

(i) और (ii) से,

$$4\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{a'}{2}=\frac{1}{1-\cos A}\times\frac{1-\cos A}{1}$$

$$\therefore\quad \cos\frac{a}{2}\cos\frac{a'}{2}=\tfrac{1}{2}$$

[**टिप्पणी**—कोणों के लिए संगत प्रश्न के लिए प्रश्न-संग्रह (2) का प्रश्न 8 देखिये ।]

उदाहरण 4. एक गोलीय त्रिभुज अपने ध्रुवीय त्रिभुज के सममिततः बराबर है। सिद्ध करो कि

$$\sec^2 A+\sec^2 B+\sec^2 C+2 \sec A \sec B \sec C=1$$

और इस परिणाम से निष्कर्ष निकालो कि ऐसा त्रिभुज समत्रिबाहु नहीं हो सकता ।

[विक्रम, '59, सागर, '62]

क्रिया—मान लो त्रिभुज ABC का ध्रुवीय त्रिभुज $A'B'C'$ है ।

चूंकि त्रिभुज ABC और $A'B'C'$ सममिततः बराबर हैं,

$\therefore$ $A=A'$, परन्तु $A'=\pi-a$, प्रमेय 13 से

$$\therefore \quad A=\pi-a$$

इसी प्रकार,

$$\left.\begin{aligned} a&=\pi-A \\ B&=\pi-b \\ b&=\pi-B \\ C&=\pi-c \\ c&=\pi-C \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (i)$$

अब, सम्पूरक कोसाइन सूत्र द्वारा,

$$\cos a=\frac{\cos A+\cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

$$\therefore \quad \cos(\pi-A)=\frac{\cos A+\cos B \cos C}{\sin B \sin C} \qquad \because (i)$$

या,

$$-\cos A=\frac{\cos A+\cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

या,

$$-\cos A \sin B \sin C=\cos A+\cos B . \cos C$$

$\cos A \cos B \cos C$ का भाग देने पर,

$$-\tan B \tan C=\sec B \sec C+\sec A$$

$$\therefore \quad \tan^2 B \tan^2 C=(\sec B \sec C+\sec A)^2$$

या, $$(\sec^2 B-1)(\sec^2 C-1)=(\sec^2 B\sec^2 C+\sec^2 A+2\sec A\sec B\sec C)$$

या, $$\sec^2 A+\sec^2 B+\sec^2 C+2\sec A\sec B\sec C=1$$

अब मान लो, त्रिभुज ABC समत्रिबाहु है तो वह समकोणिक भी है, इसलिए,

$$A=B=C$$

उपर्युक्त परिणाम में $A=B=C$ रखने पर,

$$3\sec^2 A+2\sec^3 A=1$$

या, $$3\cos A+2-\cos^3 A=0$$

या, $$\cos^3 A-3\cos A-2=0$$

या, $$(\cos A-2)(\cos^2 A+2\cos A+1)=0$$

या, $$(\cos A-2)(\cos A+1)^2=0$$

$\therefore$ या तो, $\cos A=2$, जो असम्भव है

अथवा, $\cos A=-1$

$$\therefore \quad A=\pi=B=C$$

$$\therefore \quad A+B+C=3\pi=6 \text{ समकोण}$$

जो कि असम्भव है क्योंकि धारा (3·8) से त्रिभुज के तीनों कोणों का योग छः समकोण से कम होना चाहिये।

अतः त्रिभुज ABC, जो सममितत: अपने ध्रुवीय त्रिभुज के बराबर है, समत्रिबाहु नहीं हो सकता।

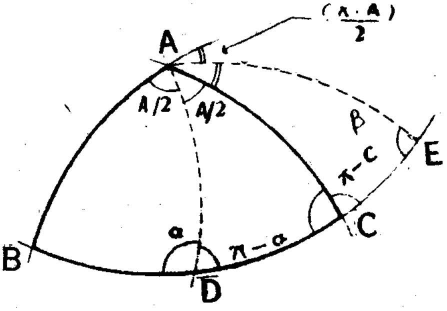
[टिप्पणी—भुजाओं के लिए संगत प्रश्न के लिए प्रश्न संग्रह (2) का प्रश्न 12 देखिये।]

उदाहरण 5. गोलीय त्रिभुज ABC के कोण A के आंतरिक और बाह्य अर्धक (Internal and External bisectors) भुजा BC के साथ क्रमशः

α और β कोण बनाते हैं। सिद्ध करो कि

$$\text{(अ)}\quad \cos\alpha = \frac{\cos C - \cos B}{2\cos A/2}$$

$$\text{(ब)}\quad \cos\beta = \frac{\cos C + \cos B}{2\sin A/2}$$



आकृति 43

मान लो चाप AD और AE क्रमशः $\angle A$ के आंतरिक और बाह्य अर्धक हैं।

$$\therefore \qquad \angle BAD = \angle CAD = \frac{A}{2}$$

तथा, $\qquad \angle ADS = \alpha$

और, $\qquad \angle AEC = \beta$

$$\angle EAD = \pi/2 \qquad \because \text{ अर्धकों के बीच का कोण।}$$

$$\angle CAE = \left(\frac{\pi - A}{2}\right) \qquad \ldots \quad \text{(i)}$$

सम्पूरक कोसाइन सूत्र से भुजा AD का मान त्रिभुज ADB और ACD से ज्ञात करके, बराबर रखने पर, त्रिभुज ADB में,

$$\cos AD = \frac{\cos B + \cos\frac{A}{2}\cos\alpha}{\sin A/2 \sin\alpha} \qquad \ldots \quad \text{(ii)}$$

त्रिभुज ACD में,

$$\cos AD = \frac{\cos C + \cos \frac{A}{2} \cos(\pi - a)}{\sin \frac{A}{2} \sin(\pi - a)}$$

$$= \frac{\cos C - \cos \frac{A}{2} \cos a}{\sin \frac{A}{2} \sin a} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(iii)}$$

(ii) और (iii) से,

$$\frac{\cos B + \cos \frac{A}{2} \cos A}{\sin \frac{A}{2} \sin a} = \frac{\cos C - \cos \frac{A}{2} \cos a}{\sin \frac{A}{2} \sin a}$$

$$\therefore \quad 2 \cos A/2 \cos a = \cos C - \cos B$$

$$\therefore \quad \cos a = \frac{\cos C - \cos B}{2 \cos A/2} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(अ)}$$

इसी प्रकार, त्रिभुज AEB में,

$$\cos AE = \frac{\cos B + \cos BAE \cos \beta}{\sin BAE \sin \beta}$$

परन्तु,

$$\angle BAE = \angle A + \angle CAE$$

$$= \angle A + \frac{\pi - A}{2} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

$$= \frac{\pi + A}{2}$$

$$\therefore \quad \cos AE = \frac{\cos B + \cos\left(\frac{\pi + A}{2}\right) \cos \beta}{\sin\left(\frac{\pi + A}{2}\right) \sin \beta}$$

$$= \frac{\cos B - \sin A/2 \cos \beta}{\cos A/2 \sin \beta} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(iv)}$$

और त्रिभुज AEC में,

$$\cos AE = \frac{\cos(\pi - C) + \cos CAE \cos \beta}{\sin CAE \sin \beta}$$

$$= \frac{-\cos C + \cos \frac{1}{2}(\pi - A) \cos \beta}{\sin \frac{1}{2}(\pi - A) \sin \beta}$$

$$= \frac{-\cos C + \sin A/2 \cos \beta}{\cos A/2 \sin \beta} \quad . \; . \; . \quad \text{(v)}$$

(iv) और (v) से,

$$\frac{\cos B - \sin \frac{A}{2} \cos B}{\cos \frac{A}{2} \sin \beta} = \frac{-\cos C + \sin A/2 \cos \beta}{\cos A/2 \sin \beta}$$

$$\therefore \quad 2 \sin A/2 \cos \beta = \cos C + \cos B$$

$$\therefore \quad \cos \beta = \frac{\cos C + \cos B}{2 \sin A/2} \quad . \; . \; . \quad \text{(ब)}$$

(स) दो भुजाएँ और उनके सम्मुख कोण। साइन सूत्र (Sine Formula)

4·4. गोलीय त्रिभुज के कोणों और उनकी सम्मुख भुजाओं के त्रिकोणमितीय साइन के अनुपात परस्पर समानुपाती होते हैं, अर्थात गोलीय त्रिभुज ABC में,

$$\sin A : \sin a :: \sin B : \sin b :: \sin C : \sin c$$

या,

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

उपपत्ति—कोसाइन सूत्र से,

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

और,

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$$

$$\therefore \quad \sin^2 A = 1 - \left(\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}\right)^2$$

$$= \frac{\sin^2 b \sin^2 c - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

$$=\frac{(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c)-(\cos^2 a+\cos^2 b\cos^2 c-2\cos a\cos b\cos c)}{\sin^2 b\sin^2 c}.$$

$$\therefore\ \sin A=\frac{\sqrt{(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 C+2\cos a\cos b\cos c)}}{\sin b\sin c}$$

यहाँ करणी का मान धनात्मक है क्योंकि त्रिभुज की भुजाएँ और कोण 180° से कम होते हैं जिससे $\sin A$, $\sin b$, $\sin c$ धनात्मक हैं।

मान लो, $n=\frac{1}{2}\sqrt{(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c)}$

हम देखते हैं कि $n(a, b, c)$ का एक सममित फलन (Symmetrical function) है। फलन n को गोलीय त्रिभुज की भुजाओं का **मानक** (Norm) कहते हैं।

$$\therefore\qquad \sin A=\frac{2n}{\sin b\sin c}$$

या,

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{2n}{\sin a\sin b\sin c}$$

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि,

$$\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{2n}{\sin a\sin b\sin c}$$

और,

$$\frac{\sin C}{\sin c}=\frac{2n}{\sin a\sin b\sin c}$$

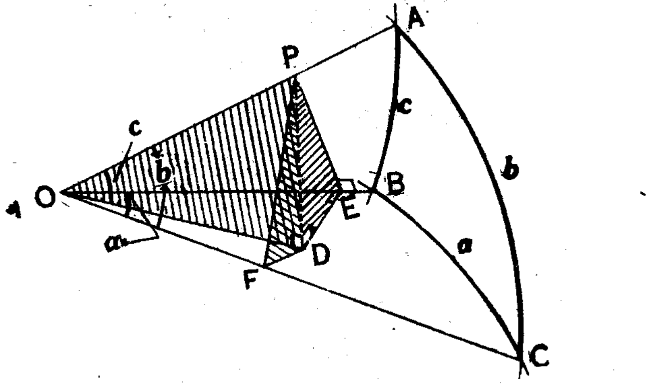
अतः

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}=\frac{2n}{\sin a\sin b\sin c}\qquad\ldots\quad(5)$$

4·4.1. साइन सूत्र की ज्यामितीय उपपत्ति

मान लो, त्रिभुज ABC उस गोले पर स्थित है जिसका केन्द्र O है। O बिन्दु को त्रिभुज के शीर्ष बिन्दुओं से मिलाओ और OA सरल रेखा पर एक स्वेच्छ बिन्दु P लो तथा इस बिन्दु से समतल OBC पर PD लम्ब डालो।

बिन्दु D से समतल OBC में, OB और OC सरल रेखाओं पर क्रमशः DE और DF लम्ब डालो । OD को मिलाओ ।



आकृति 44

रचना में, PD, समतल OBC पर लम्ब है इसलिए वह समतल में स्थित प्रत्येक रेखा पर लम्ब है ।

$\therefore$ $$\angle PDE = 90^\circ \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

और, $$\angle PDF = 90^\circ \quad . \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$

तथा, $$\angle OED = 90^\circ \quad . \quad . \quad . \quad \text{(iii)}$$

$\because$ रचना द्वारा DE, रेखा OB पर लम्ब है ।

और, $$\angle OFD = 90^\circ \quad . \quad . \quad . \quad \text{(iv)}$$

रचना द्वारा DF, रेखा OC पर लम्ब है ।

अब, (i) से समतल समकोण त्रिभुज PED में,

$$PE^2 = PD^2 + DE^2$$

परन्तु, (iii) से समतल समकोण त्रिभुज POD में,

$$OP^2 = OD^2 + PD^2$$

$\therefore$ $$PE^2 = OP^2 - (OD^2 - DE^2)$$

और (iv) से समतल समकोण त्रिभुज ODE में,

$$OD^2 = OE^2 + DE^2$$

$\therefore$ $$PE^2 = OP^2 - OE^2$$

या, $$OP^2 = PE^2 + OE^2$$

$\therefore$ समतल त्रिभुज OPE एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें

$$\angle OEP = 90° \qquad \ldots \quad (v)$$

अब, समतल समकोण त्रिभुज PED में,

$$\sin PED = \frac{PD}{PE}$$

या, $$PD = PE \sin PED$$

परन्तु (v) से, समतल समकोण त्रिभुज OPE में,

$$\begin{aligned} PE &= OP \sin POE \\ &= OP \sin AOB \\ &= OP \sin c \end{aligned}$$

और समतल कोण PED, समतल OAB और OBC के बीच द्वितल कोण है। इसलिए $\angle PED = \angle B$

$\therefore$ $$PD = OP \sin c \sin B \qquad \ldots \quad (vi)$$

इसी प्रकार, समतल समकोण त्रिभुज PFD में उपर्युक्त व्याख्या द्वारा हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$$PD = OP \sin b \sin C \qquad \ldots \quad (vii)$$

(vi) और (vii) से,

$$OP \sin c \sin B = OP \sin b \sin C$$

$\therefore$ $$\frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

समान व्याख्या से या a, b, c और A, B, C को चक्रीय क्रम में बदलने पर,

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

अतः किसी गोलीय त्रिभुज के कोणों के त्रिकोणमितीय साइन और उनकी सम्मुख भुजाओं के त्रिकोणमितीय साइन के अनुपात परस्पर समानुपाती होते हैं।

टिप्पणी। उपर्युक्त व्याख्या, b, c, B और C का मान एक समकोण से कम होने पर ही सम्भव है, क्योंकि मान लो $B \geqslant \frac{\pi}{2}$ हो तो $\angle B =$ समतल कोण $PED \geqslant \frac{\pi}{2}$। और समतल त्रिभुज PDE का एक कोण PDE, रचना द्वारा एक समकोण है। इस प्रकार हम देखते हैं कि समतल त्रिभुज PDE में दो कोण $\frac{\pi}{2}$ के बराबर या बड़े हो गये जो असम्भव है। अतः रचना में बिन्दु P से समतल OBC पर लम्ब डालना तब ही सम्भव है जब $\angle PED = \angle B < \frac{\pi}{2}$। अतः धारा (4·4.1) में स्थापित साइन सूत्र की व्यापकता प्रमाणित करने के लिए आकृति 44 को इस प्रकार रूपान्तरित करना चाहिये कि वह सब स्थितियों में सम्भव हो और सूत्र की सत्यता बनाये रखे। उदाहरण के रूप में मान लो $\angle PED = \angle B > \frac{\pi}{2}$ है। इस स्थिति में लम्ब पाद बिन्दु D', OB और OC रेखाओं के बीच में न होकर OB के दूसरी ओर होगा और $\angle PED'$ आकृति के $\angle PED$ का सम्पूरक होगा। अतः $\sin PED' = \sin(\pi - B) = \sin B$, अर्थात सूत्र इस स्थिति के लिए सत्य प्रमाणित होता है। इसी प्रकार सूत्र को शेष प्रतिबन्धों से भी मुक्त सिद्ध किया जा सकता है।

4·4.2 सम्पूरक साइन सूत्र

त्रिभुज ABC के ध्रुवीय त्रिभुज $A'B'C'$ में साइन सूत्र से,

$$\frac{\sin A'}{\sin a'} = \frac{\sin B'}{\sin b'} = \frac{\sin C'}{\sin c'}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1 - \cos^2 a' - \cos^2 b' - \cos^2 c' + 2\cos a' \cos b' \cos c'}{\sin a' \sin b' \sin c'}\right)}$$

ध्रुवीय त्रिभुज के अवयवों के मान त्रिभुज ABC के अवयवों के पदों में रखने से,

$$\frac{\sin(\pi - a)}{\sin(\pi - A)} = \frac{\sin(\pi - b)}{\sin(\pi - B)} = \frac{\sin(\pi - c)}{\sin(\pi - C)}$$

$$=\frac{\sqrt{\begin{pmatrix}1-\cos^2(\pi-A)-\cos^2(\pi-B)-\cos^2(\pi-C)\\+2\cos(\pi-A)\cos(\pi-B)\cos(\pi-C)\end{pmatrix}}}{\sin(\pi-A)\sin(\pi-B)\sin(\pi-c)}$$

या, $$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}=\frac{\sqrt{\begin{pmatrix}1-\cos^2A-\cos^2B-\cos^2C\\-2\cos A\cos B\cos C\end{pmatrix}}}{\sin A\sin B\sin C}$$

$$=\frac{2N}{\sin A\sin B\sin C}\quad\cdot\;\cdot\;\cdot\quad(6)$$

यहाँ

$N=\frac{1}{2}\sqrt{(1-\cos^2A-\cos^2B-\cos^2C-2\cos A\cos B\cos C)}$,

A, B, C का सममित फलन है। N को गोलीय त्रिभुज के **कोणों का मानक** कहते हैं।

उदाहरण 1. गोलीय त्रिभुज ABC में सिद्ध करो कि,

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{n}{N}$$

क्रिया—साइन सूत्र (5) से,

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}=\frac{2n}{\sin a\sin b\sin c}$$

सम्पूरक साइन सूत्र (6) से,

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}=\frac{2N}{\sin A\sin B\sin C}$$

$$\therefore\quad\left(\frac{\sin A}{\sin a}\right)^2=\frac{2n}{\sin a\sin b\sin c}\times\frac{\sin A\sin B\sin C}{2N}$$

$$=\frac{n}{N}\left(\frac{\sin A}{\sin a}\right)^3$$

$$\therefore\quad\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{n}{N}$$

उदाहरण 2. गोलीय त्रिभुज ABC में सिद्ध करो कि,

$$\tan\left(\frac{A-a}{2}\right)\tan\left(\frac{B+b}{2}\right)=\tan\left(\frac{B-b}{2}\right)\tan\left(\frac{A+a}{2}\right)$$

[नागपुर, '57]

क्रिया—साइन सूत्र से,

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}$$

योगान्तरानुपात से,

$$\frac{\sin A-\sin a}{\sin A+\sin a}=\frac{\sin B-\sin b}{\sin B+\sin b}$$

या, $$\frac{2\cos\left(\frac{A+a}{2}\right)\sin\left(\frac{A-a}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{A+a}{2}\right)\cos\left(\frac{A-a}{2}\right)}=\frac{2\cos\left(\frac{B+b}{2}\right)\sin\left(\frac{B-b}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{B+b}{2}\right)\sin\left(\frac{B-b}{2}\right)}$$

या, $$\tan\left(\frac{A-a}{2}\right)\tan\left(\frac{B+b}{2}\right)=\tan\left(\frac{A+a}{2}\right)\sin\left(\frac{B-b}{2}\right)$$

उदाहरण 3. गोलीय त्रिभुज ABC के शीर्ष A, B और C से उनकी सम्मुख भुजाओं पर लम्बरूप, दीर्घवृत्त चाप खींचे गये। यदि चापों की लम्बाई क्रमशः θ, ϕ, ψ हो तो सिद्ध करो कि,

$$\sin\theta\sin a=\sin\phi\sin b=\sin\psi\sin c$$

$$=\sqrt{(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c)}$$

[विक्रम, '62]

मान लो ABC के शीर्ष A से चाप AD खींचा गया जो भुजा BC पर लम्ब है। अर्थात,

$$\angle ADB=\angle ADC=\pi/2$$

त्रिभुज ABD में, साइन सूत्र (5) से,

$$\frac{\sin B}{\sin\theta}=\frac{\sin\pi/2}{\sin c}$$

$$\therefore \qquad \sin\theta=\sin c\sin B$$

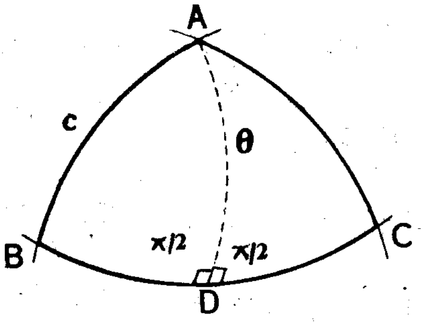
त्रिभुज ABC में, साइन सूत्र से,

$$\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{2n}{\sin a \sin b \sin c}$$

$$\therefore \quad \sin B=\frac{2n}{\sin a \sin c}$$

$$\therefore \quad \sin \theta=\sin c \frac{2n}{\sin a \sin c}$$

$$=\frac{2n}{\sin a}$$



आकृति 45

$$\therefore \; \sin \theta \sin a=2n=\sqrt{}(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2 \cos a \times \cos b \cos c$$

परिणाम की समरूपता से,

$$\sin \phi \sin b=2n$$

और,

$$\sin \psi \sin c=2n$$

अतः

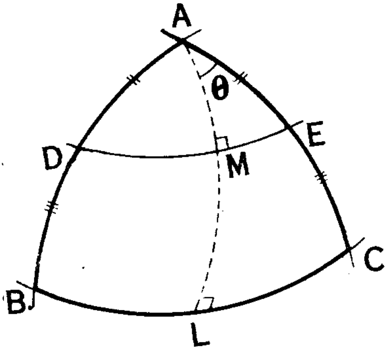
$$\sin \theta \sin a=\sin \phi \sin b=\sin \psi \sin c$$

$$=\sqrt{}(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a \cos b \cos c)$$

उदाहरण 4. एक समद्विबाहु गोलीय त्रिभुज ABC की बराबर भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को चाप DE द्वारा मिलाया गया। यदि भुजा BC त्रिभुज का आधार है

तो सिद्ध करो कि

$$\sin\frac{DE}{2}=\tfrac{1}{2}\sin\frac{BC}{2}\sec\frac{AC}{2}$$ [सागर, '63]



आकृति 46

मान लो त्रिभुज ABC में,

$$AB=AC,$$

D और E, भुजा AB और AC के मध्य बिन्दु हैं।

रचना—शीर्ष A से आधार BC पर लम्ब डाला जो BC और DE को क्रमशः L और M बिन्दुओं पर काटता है।

उपपत्ति—चूंकि त्रिभुज ABC समद्विबाहु है और D तथा E, AB और AC के मध्य बिन्दु हैं, इसलिए त्रिभुज ADE भी समद्विबाहु है और लम्ब AL, DE पर लम्ब भी है। गोलीय ज्यामिति से हम सरलतापूर्वक सिद्ध कर सकते हैं कि,

$$BL=CL=\frac{BC}{2} \qquad \ldots \text{(i)}$$

और,

$$DM=EM=\frac{DE}{2} \qquad \ldots \text{(ii)}$$

अब, त्रिभुज ALC में साइन सूत्र से,

$$\frac{\sin CL}{\sin\theta}=\frac{\sin AC}{\sin 90^\circ}, \angle\theta=\angle CAL$$

या,
$$\frac{\sin\frac{BC}{2}}{\sin\theta}=\sin AC=2\sin\frac{AC}{2}\cos\frac{AC}{2}$$

$\therefore$
$$\sin\theta=\frac{\sin\frac{BC}{2}}{2\sin\frac{AC}{2}\cos\frac{AC}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(iii)}$$

त्रिभुज AME में साइन सूत्र से,

$$\frac{\sin EM}{\sin\theta}=\frac{\sin AE}{\sin 90^\circ}$$

या,
$$\frac{\sin\frac{DE}{2}}{\sin\theta}=\sin\frac{AC}{2} \qquad \because \text{(ii)}$$

$\therefore$
$$\sin\frac{DE}{2}=\sin\theta\sin\frac{AC}{2}$$

$$=\frac{\sin\frac{BC}{2}}{2\sin\frac{AC}{2}\cos\frac{AC}{2}}\times\frac{\sin\frac{AC}{2}}{1} \qquad \because \text{(iii)}$$

$$=\tfrac{1}{2}\sin\frac{BC}{2}\sec\frac{AC}{2}$$

[**टिप्पणी**—इस प्रश्न को विद्यार्थी केवल कोसाइन सूत्र की सहायता से स्वयं करें ।]

उदाहरण 5. किसी गोलीय त्रिभुज की एक भुजा को चार बराबर भागों में विभाजित किया गया । ये भाग, सम्मुख शीर्ष पर क्रमशः θ_1, θ_2, θ_3 और θ_4 कोण बनाते हैं । सिद्ध करो कि,

$$\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{\sin(\theta_3+\theta_4)}=\frac{\sin\theta_1\sin\theta_3}{\sin\theta_2\sin\theta_4}$$ [जबलपुर, '60]

मान लो त्रिभुज ABC में,

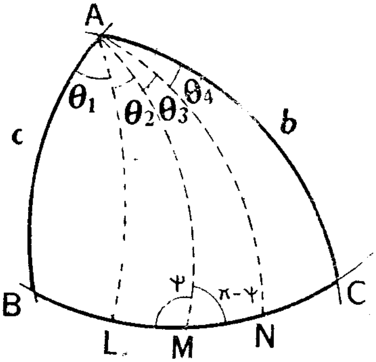
$$BL=LM=MN=NC$$

और, $\angle BAL = \theta_1,\ \angle LAM = \theta_2,$

$\angle MAN = \theta_3,\ \angle NAC = \theta_4$

तथा $\angle AMB = \psi$

$\therefore$ $\angle AMC = (\pi - \psi)$



आकृति 47

अब, त्रिभुज ABM में साइन सूत्र से,

$$\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{\sin BM} = \frac{\sin\psi}{\sin c}$$

$$\therefore \quad \sin(\theta_1+\theta_2) = \frac{\sin\psi \sin BM}{\sin c} \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

इसी प्रकार, त्रिभुज AMC में,

$$\frac{\sin(\theta_3+\theta_4)}{\sin MC} = \frac{\sin(\pi-\psi)}{\sin b}$$

$$\therefore \quad \sin(\theta_3+\theta_4) = \frac{\sin\psi \sin MC}{\sin b} \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

परन्तु, $BM = MC$, इसलिए (i) और (ii) से,

$$\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{\sin(\theta_3+\theta_4)} = \frac{\sin\psi \sin BM}{\sin c} \times \frac{\sin b}{\sin\psi \sin MC}$$

$$= \frac{\sin b}{\sin c} \quad \ldots \quad \text{(iii)}$$

परिणाम (ii) की समरूपता से, त्रिभुज ALB और ALM में,

$$\frac{\sin\,\theta_1}{\sin\,\theta_2}=\frac{\sin\,AM}{\sin\,c}$$

और त्रिभुज ANM और ANC में,

$$\frac{\sin\,\theta_3}{\sin\,\theta_4}=\frac{\sin\,b}{\sin\,AM}$$

$$\therefore \qquad \frac{\sin\,\phi_1\,\sin\,\theta_3}{\sin\,\theta_2\,\sin\,\theta_4}=\frac{\sin\,b}{\sin\,c} \qquad . \;.\;.\quad \text{(iv)}$$

(iii) और (iv) से,

$$\frac{\sin\,(\theta_1+\theta_2)}{\sin\,(\theta_3+\theta_4)}=\frac{\sin\,\theta_1\,\sin\,\theta_3}{\sin\,\theta_2\,\sin\,\theta_4}$$

प्रश्न संग्रह 3

1. गोलीय त्रिभुज ABC में, n और N क्रमशः उसकी भुजाओं और कोणों के मानक हैं। सिद्ध करो कि,

(अ) $$N=\frac{2n^2}{\sin\,a\,\sin\,b\,\sin\,c}$$

(ब) $$n=\frac{2N^2}{\sin\,A\,\sin\,B\,\sin\,C}$$

2. सिद्ध करो कि त्रिभुज ABC की भुजाओं और कोणों के मानक क्रमशः उसके ध्रुवीय त्रिभुज के कोणों और भुजाओं के मानकों के तुल्य होते हैं।

3. सिद्ध करो कि एक गोलीय त्रिभुज के n और N उसके किसी भी सह-इंदुक त्रिभुज के n और N के तुल्य होते हैं।

4. यदि गोलीय त्रिभुज ABC में $A=a$ है तो सिद्ध करो कि या तो B और b बराबर होंगे अथवा एक दूसरे के सम्पूरक होंगे। इसी प्रकार C और c भी या तो बराबर अथवा परस्पर सम्पूरक होंगे।

5. बिन्दु E और F, गोलीय त्रिभुज ABC की भुजा AC और AB के मध्य बिन्दु हैं। यदि EF बिन्दुओं को मिलाने वाला दीर्घवृत्त चाप बढ़ाये जाने

पर, बढ़ी हुई भुजा BC को D बिन्दु पर मिलता है तो सिद्ध करो कि,

$$\sin DE \cos \frac{b}{2} = \sin DF \cos \frac{c}{2}$$

6. गोलीय त्रिभुज ABC में कोण A को समद्विभाजित करने वाला दीर्घवृत्त चाप, सम्मुख भुजा BC को D बिन्दु पर काटता है। यदि बिन्दु E, भुजा BC का मध्य बिन्दु है तो सिद्ध करो कि

$$\tan DE \tan\left(\frac{b+c}{2}\right) = \tan \frac{a}{2} \tan\left(\frac{b-c}{2}\right)$$

7. गोलीय त्रिभुज ABC में शीर्ष बिन्दुओं से सम्मुख भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाले चापों का कटन बिन्दु, भुजा a को समद्विभाजित करने वाले चाप को, α और β भागों में विभाजित करता है। सिद्ध करो कि,

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 2 \cos \frac{a}{2} \qquad \text{[उत्कल, '59]}$$

8. गोलीय त्रिभुज ABC के शीर्ष C से आधार AB पर खींचे गये लम्बरूप चाप की लम्बाई यदि δ है तो सिद्ध करो कि,

$$\cos^2 a + \cos^2 b - 2 \cos a \cos b \cos c = \sin^2 c \cos^2 \delta$$

या, $\cos \delta = \operatorname{cosec} c\,(\cos^2 a + \cos^2 b - 2 \cos a \cos b \cos \mathrm{c})^{1/2}$

[विक्रम, '59, सागर, '66]

[**संकेत**। उदाहरण 2 के परिणाम का अनुप्रयोग करो।]

9. यदि गोलीय त्रिभुज ABC में $b+c=\pi$ है तो सिद्ध करो कि,

$$\sin 2B + \sin 2C = 0 \qquad \text{[इलाहाबाद, '52]}$$

[**संकेत**। $b+c=\pi$

$\therefore$ $\sin b = \sin(\pi - c)$

$= \sin c$

$\therefore$ $\sin B = \sin C$ $\because$ साइन सूत्र से।

$\therefore$ या तो $B = C$ अथवा $B = \pi - C$

प्रथम सम्भावना—मान लो, $B=C$

$\therefore$ $b=c$ $\because$ बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ।

परन्तु $b+c=\pi$ $\therefore$ $b=c=\pi/2$

$\therefore$ A, चाप BC का ध्रुव है।

$$\therefore \quad B=b=\pi/2 \text{ और } C=c=\pi/2$$

$$\therefore \quad \sin 2B+\sin 2C=\sin \pi+\sin \pi$$
$$=0$$

द्वितीय सम्भावना—मान लो, $B=\pi-C$

$$\sin 2B+\sin 2C=\sin 2(\pi-C)+\sin 2C$$
$$=-\sin 2C+\sin 2C$$
$$=0]$$

[**टिप्पणी**—इस प्रश्न को साइन और कोसाइन दोनों सूत्रों के अनुप्रयोग से और भी सरलतापूर्वक हल कर सकते हैं।]

10. त्रिभुज ABC में n और N क्रमशः उसकी भुजाओं और कोणों के मानक हैं। सिद्ध करो कि

$$\frac{\sin A \sin B \sin C}{\sin a \sin b \sin c}=\frac{N^3}{n^3}$$

(द) दो भुजाएँ, उनके बीच का कोण और एक और कोण

अर्थात

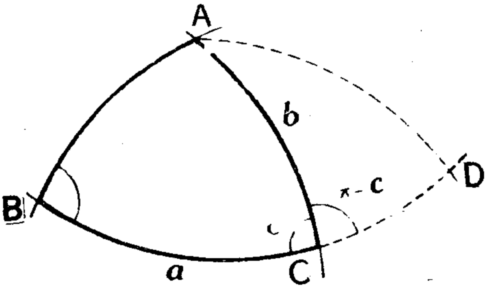
चार क्रमागत अवयवों में सम्बन्ध

कोटैन्जेन्ट सूत्र (Cotangent Formula)

5·4. गोलीय त्रिभुज की दो भुजाओं, उनके बीच के कोण और एक अ कोण अर्थात त्रिभुज के चार क्रमागत अवयवों के बीच सम्बन्ध स्थापित करना।

मान लो गोलीय त्रिभुज ABC के क्रमाग्त (Consecutive) चार अवयव, B, a, C और b हैं।

रचना—भुजा BC को बिन्दु D तक इस प्रकार बढ़ाओ कि चाप $BD = \pi/2$। AD को मिलाओ।



आकृति 48

उपपत्ति—त्रिभुज ACD में कोसाइन सूत्र से,

$$\cos AD = \cos b \cos CD + \sin b \sin CD \cos (\pi - C)$$

$$= \cos b \cos (\pi/2 - a) - \sin b \sin (\pi/2 - a) \cos C$$

$$= \cos b \sin a - \sin b \operatorname{coc} a \cos C \quad . \ . \ . \quad \text{(i)}$$

इसी प्रकार, त्रिभुज ABD में, कोसाइन सूत्र से,

$$\cos AD = \cos c \cos BD + \sin c \sin BD \cos B$$

$$= \cos c \cos \pi/2 + \sin \mathrm{c} \sin \pi/2 \cos B$$

$$= \sin c \cos B \quad . \ . \ . \quad \text{(ii)}$$

(i) और (ii) से,

$$\cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C = \sin c \cos B$$

sin b से भाग देने पर,

$$\cot b \sin a = \cos a \cos C + \frac{\sin c}{\sin b} \cos B \quad . \ . \quad \text{(iii)}$$

साइन सूत्र से,

$$\frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

$$\therefore \quad \frac{\sin \mathrm{c}}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin B}$$

(iii) में मान रखने पर,

$$\cot b \;\sin a = \cos a \cos C + \frac{\sin C}{\sin B} . \cos B$$

$$= \cos a \cos C + \sin C \cot B$$

या,

$$\cos a \cos C = \sin a \cot b - \sin C \cot B$$

4·5.1. टिप्पणी 1. उपर्युक्त सूत्र में त्रिकोणमितीय कोटैन्जेन्ट अनुपात के पदों के उपस्थित होने के कारण, स्मरण की सुविधा के लिए, इसे **कोटैन्जेन्ट सूत्र** कहते हैं।

2. आकृति 48 में अवयवों को, विशेष स्थिति में, विशेष नाम देने से कोटैन्जेन्ट सूत्र को भाषा में स्मरण रख सकते हैं। जैसे, अवयव B, a, C, b में भुजा a कोण B और C के बीच स्थित है। इसे हम 'भीतरी भुजा' (Inner side) और शेष भुजा b को 'दूसरी भुजा' (other side) कहें तथा दी हुई भुजाओं के बीच के कोण C को 'भीतरी कोण' और शेष बचे कोण B को दूसरा कोण कहें तो धारा (4·5) के कोटैन्जेन्ट सूत्र को हम निम्न भाषा में स्मरण रख सकते हैं :

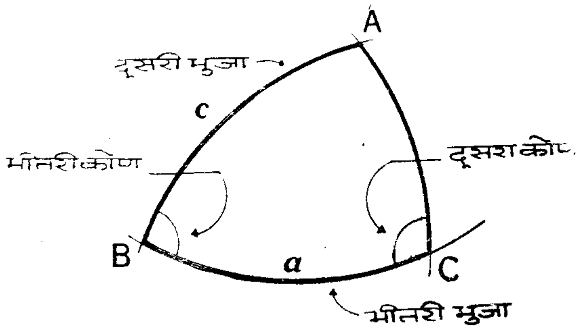
कोसाइन (भीतरी भुजा) . कोसाइन (भीतरी कोण)
= साइन (भीतरी भुजा) . कोटैन्जेन्ट (दूसरी भुजा)
— साइन (भीतरी कोण) . कोटैन्टेन्ट (दूसरा कोण)

या,

cos (Inner side) . cos (Inner angle)
= sin (Inner side) . cot (Other angle)
— sin (Inner angle) . cot (Other angle)

त्रिभुज ABC में कोई भी चार क्रमागत अवयव लेने पर उनमें 'भीतरी' और 'दूसरी' भुजा तथा कोण ज्ञात किये जा सकते हैं और उनमें कोटैन्जेन्ट सम्बन्ध उपर्युक्त विधि द्वारा लिखा जा सकता है। जैसे—मान लो, चार क्रमागत अवयव c, B, a, C हैं।

स्पष्ट है कि भीतरी भुजा a है और भीतरी कोण B है। शेष बची भुजा



आकृति 49

और कोण क्रमशः दूसरी भुजा और दूसरा कोण है। अतः कोटैन्जेन्ट सूत्र इस प्रकार से लिखा जायेगा

$$\cos a \cos B = \sin a \cot c - \sin B \cot C$$

और यदि क्रमागत अवयव, B, a, C, b है तो,

$$\left.\begin{array}{ll}\text{भीतरी भुजा} = a; & \text{दूसरी भजा} = b\\ \text{भीतरी कोण} = C; & \text{दूसरा कोण} = B\end{array}\right\}$$

अतः कोटैन्जेन्ट सूत्र,

$$\cos a \cos B = \sin a \cot b - \sin C \cot B$$

होगा।

4·5.2. त्रिभुज के छः अवयवों में से चार क्रमागत अवयव हम कुल छः प्रकार से चुन सकते हैं। अतः कोटैन्जेन्ट सूत्र हमें निम्न छः रूपों में प्राप्त हो सकता है।

कोटैन्जेन्ट सूत्र

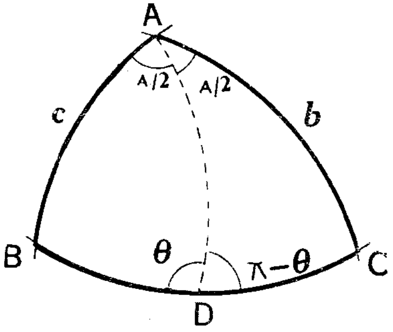
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\cos a \cos B = \sin a \cot c - \sin B \cot C\\ \cos b \cos C = \sin b \cot a - \sin C \cot A\\ \cos c \cos A = \sin C \cot b - \sin A \cot B\end{array}\right\}\text{(i)}\\ \\ \left.\begin{array}{l}\cos a \cos C = \sin a \cot b - \sin C \cot B\\ \cos b \cos A = \sin b \cot c - \sin A \cot C\\ \cos c \cos B = \sin c \cot a - \sin B \cot A\end{array}\right\}\text{(ii)}\end{array}\right\}\quad(7)$$

उपर्युक्त कोटैन्जेन्ट सूत्रों को यदि दो भागों, (i) और (ii), में विभाजित कर

दें तो प्रत्येक भाग में कोई एक को प्रतिनिधि मानकर शेष सूत्र, अवयवों को चक्रीय क्रम में बदल कर प्राप्त किये जा सकते हैं।

4·5.3. उदाहरण 1. गोलीय त्रिभुज ABC में यदि AD कोण BAC का आंतरिक समद्विभाजक है तो सिद्ध करो कि

$$\cot AD-\frac{\cot b+\cot c}{2\cos \frac{1}{2}A}=\frac{\sin (b+c)}{2 \sin b \cos \frac{1}{2}A \sin c}$$ [सागर, '52]



आकृति 50

मान लो, आकृति के त्रिभुज ABC में AD, कोण BAC का आन्तरिक समद्विभाजक है और मान लो,

$$\angle ADB=\theta$$

$$\therefore \qquad \angle ADC=\pi-\theta$$

अब त्रिभुज ADB में, क्रमागत अवयव c, $\frac{1}{2}A$, AD और θ के लिये कोटैन्जेन्ट सूत्र से,

$$\cos AD \cos \tfrac{1}{2}A=\sin AD \cot c-\sin \tfrac{1}{2}A \cot \theta \qquad \ldots \text{(i)}$$

इसी प्रकार त्रिभुज ADC में, b, $\frac{1}{2}A$, AD और $(\pi-\theta)$ अवयवों के लिए कोटैन्जेन्ट सूत्र से,

$$\begin{aligned}\cos AD \cos \tfrac{1}{2}A&=\sin AD \cot b-\sin \tfrac{1}{2}A \cot (\pi-\theta)\\ &=\sin AD \cot b+\sin \tfrac{1}{2}A \cot \theta \qquad \ldots \text{(ii)}\end{aligned}$$

(i) और (ii) को जोड़ने पर,

$$2\cos AD\cos\tfrac{1}{2}A=\sin AD\,(\cot c+\cot b)$$

$$\therefore\qquad \cot AD=\frac{\cot c+\cot b}{2\cos\frac{1}{2}A}\qquad\ldots\quad(a)$$

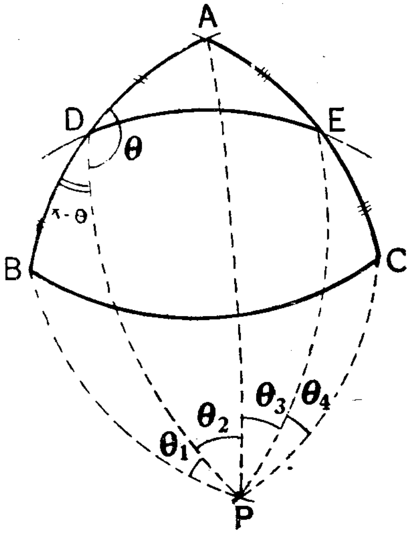
$$=\frac{\sin b\cos c+\cos b\sin c}{2\sin b\sin c\cos\frac{1}{2}A}$$

$$=\frac{\sin(b+c)}{2\sin b\sin c\cos\frac{1}{2}A}\qquad\ldots\quad(b)$$

उदाहरण 2. एक दीर्घवृत्त चाप DE, गोलीय त्रिभुज ABC की AB और AC भुजाओं को समद्विभाजित करता है और बिन्दु P उसका ध्रुव है। यदि बिन्दु P को दीर्घवृत्त चापों द्वारा क्रमशः B, D, E और C बिन्दुओं से मिलाया जाय तो सिद्ध करो कि

$$\angle BPC=2\angle DPE$$

[जबलपुर, '60; सागर, '53; आगरा, '63]



आकृति 51

दिया है—(अ) बिन्दु D और E, भुजा AB और AC के मध्य बिन्दु हैं। अतः $AD=BD$ और $AE=CE$

(ब) बिन्दु P, चाप DE का ध्रुव है। अर्थात,

$$PD = PE = \pi/2$$

सिद्ध करना है— $\angle BPC = 2\angle DPE$

रचना—P बिन्दु को दीर्घवृत्त चाप द्वारा बिन्दु A से मिलाया।

उपपत्ति—मान लो, बिन्दु P पर बने कोण आकृति में दर्शाये अनुसार

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ और θ_4 हैं,

और मान लो $\angle ADP = \theta$

$\therefore \quad \angle BDP = \pi - \theta$

अब, त्रिभुज ADP में चार क्रमागत अवयवों θ_2, PD, θ और AD, में कोटैन्जेन्ट सूत्र लगाने पर,

$$\cos PD \cos \theta = \sin PD \cot AD - \sin \theta \cot \theta_2$$

या, $\cos \pi/2 \cos \theta = \sin \pi/2 \cot AD - \sin \theta \cot \theta_2 \quad \because$ (ब)

$\therefore \quad \cot AD = \sin \theta \cot \theta_2 \quad \ldots \quad (1)$

इसी प्रकार, त्रिभुज BDP में चार क्रमागत अवयवों $\theta_1, PD, (\pi - \theta)$ और BD में कोटैन्जेन्ट सूत्र से,

$$\cot BD = \sin (\pi - \theta) \cot \theta_1$$

परन्तु, $AD = BD \quad \because$ (अ)

और, $\sin (\pi - \theta) = \sin \theta$

$\therefore \quad \cot AD = \sin \theta \cot \theta_1 \quad \ldots \quad (2)$

(1) और (2) से,

$$\cot \theta_1 = \cot \theta_2$$

$\therefore \quad \theta_1 = \theta_2 \quad \ldots \quad (3)$

इसी प्रकार, त्रिभुज AEP और CEP में हम सिद्ध कर सकते हैं कि,

$\theta_3 = \theta_4 \quad \ldots \quad (4)$

(3) और (4) से,

$$\theta_1 + \theta_4 = \theta_2 + \theta_3$$

$\therefore \quad \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 2(\theta_2 + \theta_3)$

या, $\angle BPC = 2\angle DEP$

टिप्पणी—इस प्रश्न को केवल गोलीय ज्यामिति की सहायता से विद्यार्थी स्वंय हल करें।

प्रश्न संग्रह 4

1. गोलीय त्रिभुज ABC में यदि AE कोण BAC का बाह्य समद्विभाजक है तो सिद्ध करो कि

$$\cot AE = \frac{\cot b - \cot c}{2 \sin \frac{1}{2}A}. \qquad \ldots \quad (\text{अ})$$

$$= \frac{\sin (c-b)}{2 \sin b \sin c \sin \frac{1}{2}A} \qquad \ldots \quad (\text{ब})$$

2. गोलीय त्रिभुज ABC के आधार BC पर यदि D कोई स्वेच्छ बिन्दु है, तो सिद्ध करो कि

$$\sin A \cot AD = \cot b \sin BAD + \cot C \sin DAC$$

उपर्युक्त परिणाम से कोण A के आन्तरिक और बाह्य समद्विभाजकों की (शीर्ष A और आधार BC के बीच की) लम्बाई ज्ञात करो।

[**संकेत**—प्रश्न के दूसरे भाग के लिए,

(i) यदि AD आंतरिक समद्विभाजक है तो,

$$\angle BAD = \angle DAC = \tfrac{1}{2}A$$

प्रथम भाग के परिणाम में मान रखने पर,

$$\cot AD \sin A = \cot b \sin \tfrac{1}{2}A + \cot c \sin \tfrac{1}{2}A$$

$$= \sin \tfrac{1}{2}A (\cot b + \cot c)$$

$$\therefore \qquad \cot AD = \frac{\cot b + \cot c}{2 \cot \frac{1}{2}A}.$$

देखो उदाहरण 1।]

3. यदि गोलीय त्रिभुज ABC के अन्तः कोणों के समद्विभाजकों के शीर्ष और आधार के बीच की लम्बाई क्रमशः θ, ϕ, ψ हो तो सिद्ध करो कि,

$$\cot \theta \cos \tfrac{1}{2}A + \cot \phi \cos \tfrac{1}{2}B + \cot \psi \cos \tfrac{1}{2}C$$

$$= \cot a + \cot b + \cot c. \qquad [\text{सागर, 1966}]$$

4. यदि एक गोलीय त्रिभुज के कोणों के बाह्य समद्विभाजकों की (शीर्ष और आधार के बीच) लम्बाइयाँ क्रमशः δ_1, δ_2, δ_3 हैं तो सिद्ध करो कि

$$\cot\delta_1\sin\tfrac{1}{2}A+\cot\delta_2\sin\tfrac{1}{2}B+\cot\delta_3\sin\tfrac{1}{2}C=2$$

[नागपुर, 1957]

5. गोलीय त्रिभुज ABC में $\angle A$ समकोण है। समकोण के आन्तरिक और बाह्य द्विभाजक आधार BC को क्रमशः X और (बढ़ाये गये BC को) Y बिन्दुओं पर काटते हैं तो सिद्ध करो कि

$$\cot^2 AX+\cot^2 AY=\cot^2 b+\cot^2 c$$

[विक्रम, 1963; सागर, 1963]

6. गोलीय त्रिभुज ABC में, $\angle C=90°$ और $b=3a$ है। यदि कोण C के आंतरिक समद्विभाजक की (शीर्ष और आधार के बीच) लम्बाई δ हो तो सिद्ध करो कि

$$\tan\delta=\tfrac{1}{4}(\tan a+\tan 2a).$$

7. गोलीय त्रिभुज ABC की भुजा BC का मध्य बिन्दु यदि त्रिभुज के शीर्ष बिन्दुओं A, B और C से समान दूरी पर हों तो सिद्ध करो कि,

$$\cot B\cot C=\cos^2\tfrac{1}{2}a.$$

8. गोलीय त्रिभुज ABC में यदि कोण C, भुजा a के बराबर हो तो सिद्ध करो कि,

$$\sin(B-b)=\sin b\sin B\cot c\cos C.$$

[संकेत। $C=a$

$\therefore$ $\sin C=\sin a$, इत्यादि। . . . (i)

$$\sin(B-b)=\sin B\cos b-\cos B\sin b$$
$$=\sin b\sin B(\cot b-\cot B) \quad . . . (ii)$$

अब, त्रिभुज ABC में कोटैन्जेन्ट सूत्र और (i) से,

$$\cos a\cos C=\sin a\cot b-\sin C\cot B$$
$$=\sin a(\cot b-\cot B)$$

या, $\cot b-\cot B=\cot C\cos C$

$\therefore$ $\sin(B-b)=\sin b\sin B\cot c\cos C$].

9. गोलीय त्रिभुज ABC में सिद्ध करो कि,

$$\tan b = \frac{\tan a \cos C + \tan c \cos A}{1 - \tan a \tan c \cos A \cos C}$$

[**टिप्पणी**—इस प्रश्न को केवल कोसाइन सूत्र द्वारा हल करने के लिए प्रश्न संग्रह 2 का प्रश्न 9 देखो ।]

[**संकेत**—शीर्ष B से भुजा AC पर BD लम्ब खींचो ।

$\triangle ABD$ और CBD में कोटैन्जेन्ट सूत्र से,

$$\cos AD \cos A = \sin AD \cot AB - \sin A \cot 90^\circ$$

या, $$\tan AD = \cos A \tan AB = \cos A \tan c$$

इसी प्रकार,

$$\tan DC = \cos C \tan AB = \cos C \tan c$$

अब, $$\tan b = \tan (AD + DC) = \frac{\tan AD + \tan DC}{1 - \tan AD \tan DC}$$

$\tan AD$ और $\tan DC$ का मान स्थापित करने पर अभीष्ट परिणाम प्राप्त होगा ।]

10. गोले के पृष्ठ पर स्थित गोलीय चर्तुभुज $ABCD$ की क्रमागत भुजाओं AB और BC की लम्बाइयाँ क्रमशः a और b हैं तथा $\angle ABD = \theta$ है । सिद्ध करो कि

$$\tan \theta = \frac{\cos a \sin b - \sin a (\cos b \cos B + \cot C \sin B)}{-\cot A \sin b + \sin a (\cos b \sin B - \cot C \cos B)}$$

[सागर, 1950]

कोसाइन सूत्र से निगमित कुछ विशेष सूत्र

4·6. अर्ध कोण सूत्र (Half Angle Formulae)

गोलीय त्रिभुज के अर्धकोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों (साइन, कोसाइन और टैन्जेन्ट) को भुजाओं के त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में ज्ञात करना ।

क्रिया—कोसाइन सूत्र 2,

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

और सरल त्रिकोणमिति से,

$$2\cos^2 \tfrac{1}{2}A = 1+\cos A$$

$$\therefore \qquad 2\cos^2 \tfrac{1}{2}A = 1+\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{\sin b\sin c+\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{\cos a-\cos(b+c)}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{2\sin\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\sin\left(\frac{b+c+a}{2}\right)}{\sin b\sin c}$$

अब मान लो, $a+b+c=2s$

तो, $-a+b+c=2s-2a=2(s-a)$

और, $a-b+c=2s-2b=2(s-b)$, इत्यादि

अतः,

$$2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{2\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}$$

$$\therefore \qquad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\left(\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}\right)}$$

इसी प्रकार,

$$2\sin^2\frac{A}{2}=1-\cos A$$

$$=\frac{\sin b\sin c-\cos a+\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{\cos(b-c)-\cos a}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{2\sin\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{2\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}$$

$$\therefore \qquad \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\left(\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}\right)}$$

उपर्युक्त परिणामों से,

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}\right)}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}\right)}\times\sqrt{\left(\frac{\sin(s-a)}{\sin(s-a)}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sin(s-a)}\sqrt{\left(\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}\right)}.$$

मान लो,

$$\sqrt{\left(\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}\right)}=\tan r$$

तो,

$$\tan\tfrac{1}{2}A=\frac{\tan r}{\sin(s-a)}$$

[अध्याय 7, धारा (7·1) में हम देखेंगे कि r, त्रिभुज ABC के अन्तर्गत वृत्त की त्रिज्या दर्शाता है।]

उपर्युक्त परिणामों को संक्षेप में निम्न प्रकार से दर्शा सकते हैं।

$$\sin\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\left(\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}\right)} \quad . \; . \; . \quad (8)$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\left(\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}\right)} \quad . \; . \; . \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned}\tan\tfrac{1}{2}A&=\sqrt{\left(\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}\right)}\\&=\frac{\tan r}{\sin(s-a)}\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (10)$$

4·6·1. सूत्र (8) और (9) के अनुप्रयोग से,

$$\sin A = 2 \sin \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}A$$

$$= 2\sqrt{\left(\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}\right)}\sqrt{\left(\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}\right)}$$

$$= \frac{2}{\sin b \sin c}\sqrt{\{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\}}$$

$$\therefore \quad \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{2}{\sin a \sin b \sin c}\sqrt{\{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\}}$$

और धारा (4·4) के साइन सूत्र से,

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = \frac{2n}{\sin a \sin b \sin c}$$

$$= \frac{\sqrt{(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c)}}{\sin a \sin b \sin c}$$

उपर्युक्त परिणामों से,

$$n = \sqrt{\{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\}}$$

$$= \sqrt{(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c)}$$

4·7. अर्धभुजा सूत्र (Half side Formulae)

गोलीय त्रिभुज की अर्ध भुजाओं के त्रिकोणमितीय अनुपातों (साइन, कोसाइन और टैन्जेन्ट) को कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में ज्ञात करना ।

क्रिया—संपूरक कोसाइन सूत्र (4),

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

और सरल त्रिकोणमिति से,

$$2\cos^2 \tfrac{1}{2}a = 1 + \cos a$$

$$= 1 + \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

$$=\frac{\sin B\sin C+\cos A+\cos B\cos C}{\sin B\sin C}$$

$$=\frac{\cos A+\cos(B-C)}{\sin B\sin C}$$

$$=\frac{2\cos\left(\frac{A+B-C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B+C}{2}\right)}{\sin B\sin C}$$

मान लो, $A+B+C=2S$

तो, $-A+B+C=2S-2A=2\,(S-A)$; इत्यादि ।

अतः, $2\cos^2\frac{1}{2}a=\frac{2\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C}$

$\therefore$ $\cos\frac{1}{2}a=\sqrt{\left(\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C}\right)}$

इसी प्रकार,

$$2\sin^2\frac{1}{2}a=1-\cos a$$

$$=1-\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\sin B\sin C}$$

$$=\frac{\sin B\sin C-\cos A-\cos B\cos C}{\sin B\sin C}$$

$$=-\frac{\cos(B+C)+\cos A}{\sin B\sin C}$$

$$=-\frac{2\cos\left(\frac{A+B+C)}{2}\right)\cos\left(\frac{B+C-A)}{2}\right)}{\sin B\sin C}$$

या, $\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\left(\left\{\frac{\cos S\cos(S-A)}{\sin B\sin C}\right\}\right)}$

उपर्युक्त परिणामों से,

$$\tan\frac{a}{2}=\frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\sin B\sin C}\right)}\sqrt{\left(\frac{\sin B\sin C}{\cos(S-B)\cos(S-C)}\right)}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C}\right)}$$

$$=\cos(S-A)\sqrt{\left(\frac{-\cos S}{\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}\right)}$$

अब मान लो,

$$\sqrt{\left(\frac{-\cos S}{\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}\right)}=\tan R$$

तो,

$$\tan\frac{a}{2}=\cos(S-A)\tan R$$

संक्षेप में,

$$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\left(\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\sin B\sin C}\right)}\quad\ldots\quad(11)$$

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\left(\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C}\right)}\quad\ldots\quad(12)$$

$$\left.\begin{aligned}\tan\frac{a}{2}&=\sqrt{\left(\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}\right)}\\&=\tan R\cos(S-A).\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(13)$$

[अध्याय 7, धारा (7·3) में हम देखेंगे कि R, त्रिभुज ABC के परिगत वृत्त की त्रिज्या दर्शाता है।]

4·7.1. सूत्र (11) और (12) से,

$$\sin a=2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$$

$$=2\sqrt{\left(\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\sin B\sin C}\right)}\sqrt{\left(\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C}\right)}$$

$$=\frac{2}{\sin B\sin C}\sqrt{\{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)\}}$$

और धारा (4·4.2) के सम्पूरक साइन सूत्र से,

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}=\frac{2N}{\sin A \sin B \sin C}$$

$$=\sqrt{\frac{(1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C-2\cos A\cos B\cos C)}{\sin A\sin B\sin C}}$$

उपर्युक्त परिणामों से,

$$N=\sqrt{(1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C-2\cos A\cos B\cos C)}$$
$$=\sqrt{\{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)\}}$$

4·7.2. टिप्पणी (1)

शेष अर्ध कोणों और अर्ध भुजाओं के संगत सूत्र धारा (4·6) और (4·7) के सूत्रों में a, b, c और A, B, C को चक्रीय क्रम में बदलने से प्राप्त किये जा सकते हैं। जैसे,

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\left(\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}\right)}$$

से, अवयवों को चक्रीय क्रम में बदलने पर,

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\left(\frac{\sin(s-c)\sin(s-a)}{\sin c\sin a}\right)}$$

और,
$$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\left(\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\sin B\sin C}\right)}$$

से, अवयवों को चक्रीय क्रम में बदलने पर,

$$\sin\frac{b}{2}=\sqrt{\left(\frac{-\cos S\cos(S-B)}{\sin C\sin A}\right)}$$

इत्यादि।

(2) धारा (4·6) और (4·7) में करणी के चिह्न सदैव धन लेना चाहिये क्योंकि परिपाटी के अनुसार गोलीय त्रिभुज के कोण और भुजाएँ 180° से कम होती हैं और इसीलिए प्रत्येक अर्ध कोण और अर्ध भुजा एक समकोण से कम होता है। अतः उसके साइन, कोसाइन और टैन्जेन्ट त्रिकोणमितीय अनुपातों का मान धनात्मक होता है।

(3) सरल त्रिकोणमिति के अनुसार ही गोलीय त्रिकोणमिति में अर्ध कोण और अर्ध भुजा सूत्र त्रिभुज के निर्धारण में विशेष रूप से उपयोगी सिद्ध होते हैं। जब त्रिभुज की भुजाएँ ज्ञात हों और कोणों का मान ज्ञात करना हो; अथवा कोण दिये हों और भुजाओं का मान ज्ञात करना हो तब कोसाइन सूत्रों की अपेक्षा अर्ध भुजा और कोण सूत्रों का अनुप्रयोग गणना को बहुत सरल बना देता है।

[अध्याय 6, धारा (6·3) में यह स्पष्ट हो जायेगा।]

(4) धारा (4·7) के सूत्रों से हमें

$$\sin\frac{a}{2}, \cos\frac{a}{2}, \tan\frac{a}{2}$$

इत्यादि के वास्तविक मान प्राप्त होते हैं। क्योंकि

$$\pi < A+B+C < 3\pi \quad \because \text{ धारा } (3\cdot8);\ 3$$

$$\therefore \quad \pi/2 < S < \frac{3\pi}{2} \quad \because\ A+B+C=2S$$

$$\therefore \quad \cos S < 0 \quad \ldots \text{(i)}$$

अब त्रिभुज ABC के ध्रुवीय त्रिभुज में,

एक भुजा < शेष दो भुजाओं का योग

और चूँकि ध्रुवीय त्रिभुज की भुजाएँ आधारी त्रिभुज के कोणों की सम्पूरक होती हैं, इसलिए,

$$\pi-A < \{(\pi-B)+(\pi-C)\}$$

या,

$$B+C-A < \pi$$

$$\therefore \quad S-A < \pi/2$$

परन्तु त्रिभुज के कोण π से कम होते हैं। इसलिए $A < \pi$।

अतः $(S-A)$ का बीजीय मान $(-\pi/2)$ से बड़ा है।

$$\therefore \quad -\pi/2 < S-A < \pi/2$$

$$\therefore \quad \cos(S-A) > 0 \quad \ldots \text{(ii)}$$

इसी प्रकार,

$$\cos(S-B) > 0 \quad \ldots \text{(iii)}$$

और

$$\cos(S-C) > 0 \quad \ldots \text{(iv)}$$

(i), (ii), (iii) और (iv) से मान रखने पर,

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}a = \frac{-\cos S \cos(S-A)}{\sin B \sin C}$$

$$>0 \qquad \because \sin B > 0, \sin C > 0;$$ क्योंकि कोणों के मान π से कम होते हैं।

$\therefore$ $\sin \frac{1}{2}a =$ (वास्तविक राशि)

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि $\cos \frac{1}{2}a$ और $\tan \frac{1}{2}a$ इत्यादि के मान भी वास्तविक हैं।

4·7.3. उदाहरण 1. गोलीय त्रिभुज ABC की भुजाओं का योग दो चतुर्थांशों के बराबर है, अर्थात $a+b+c=\pi$। सिद्ध करो कि

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}A + \sin^2 \tfrac{1}{2}B + \sin^2 \tfrac{1}{2}C = 1$$ [सागर, 1962]

अर्ध कोण सूत्र (8) से,

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}A = \frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}$$

परन्तु दिया है कि

$$a+b+c=\pi$$

$$\therefore \qquad s=\pi/2$$

$$\therefore \qquad \sin^2 \tfrac{1}{2}A = \frac{\sin(\pi/2-b)\sin(\pi/2-c)}{\sin b \sin c}$$

$$= \cot b \cot c \qquad \ldots \quad \text{(i)}$$

इसी प्रकार,

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}B = \cot a \cot c \qquad \ldots \quad \text{(ii)}$$

और,

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}C = \cot a \cot b \qquad \ldots \quad \text{(iii)}$$

(i), (ii) और (iii) से,

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}A + \sin^2 \tfrac{1}{2}B + \sin^2 \tfrac{1}{2}C = \cot b \cot c + \cot c \cot a + \cot a \cot b \qquad \ldots \quad \text{(iv)}$$

अब, सरल त्रिकोणमिति से,

$$\tan(a+b+c) = \frac{\tan a + \tan b + \tan c - \tan a \tan b \tan c}{1 - \Sigma \tan a \tan b}$$

यहाँ, $\Sigma \tan a \tan b = \tan a \tan b + \tan b \tan c + \tan c \tan a$

परन्तु, $a+b+c=\pi$

$$\therefore \quad \tan(a+b+c) = \tan \pi = 0$$

$$\therefore \quad \tan a + \tan b + \tan c = \tan a \tan b \tan c$$

दोनों ओर $\tan a \tan b \tan c$ का भाग देने पर,

$$\cot b \cot c + \cot c \cot a + \cot a \cot b = 1 \quad . \; . \; . \quad \text{(v)}$$

अतः (iv) और (v) से अभीष्ट परिणाम प्राप्त हो जाता है।

उदाहरण 2. गोलीय त्रिभुज ABC में सिद्ध करो कि,

$$\tan \tfrac{1}{2}a \tan \tfrac{1}{2}b = \frac{-\cos S}{\cos(S-C)}; \text{ जब, } 2S = A+B+C$$

अर्ध भुजा सूत्र (13) से,

$$\tan \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\left(\frac{-\cos S \cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}\right)}$$

$$\tan \tfrac{1}{2}b = \sqrt{\left(\frac{-\cos S \cos(S-B)}{\cos(S-A)\cos(S-C)}\right)}$$

$$\therefore \quad \tan \tfrac{1}{2}a \tan \tfrac{1}{2}b = \sqrt{\left(\frac{-\cos S \cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}\right)} \times \sqrt{\left(\frac{-\cos S \cos(S-B)}{\cos(S-A)\cos(S-C)}\right)}$$

$$= \frac{-\cos S}{\cos(S-C)}$$

करणी हटाने में ऋण मान लिया है क्योंकि

$$\text{वाम पक्ष} > 0 \qquad \because \; a, b < \pi$$

इसलिए $\tan \frac{1}{2}a$, और $\tan \frac{1}{2}b$, दोनों धनात्मक हैं।

अतः दाहिने पक्ष का मान भी धनात्मक होना चाहिये। धारा (4·7.1) में हम सिद्ध कर चुके हैं कि $\cos S < 0$ और $\cos(S-C) > 0$; इसलिए दाहिने पक्ष का मान धनात्मक करने के लिए करणी का मान ऋणात्मक होना चाहिये।

उदाहरण 3. गोलीय त्रिभुज ABC में यदि $A=B=2C$ है तो सिद्ध करो कि,

$$8 \sin^2 \tfrac{1}{2}C (\cos s+\sin \tfrac{1}{2}C) \cos \tfrac{1}{2}C=\cos a$$

[सागर, 1952]

उपपत्ति— $A=B$ दिया है।

$\therefore$ $$a=b \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

और, $A=2C$ दिया है।

$\therefore$ $$\sin \frac{A}{2}=\sin C=2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$$

अर्ध कोण सूत्र (8) से,

$$\sqrt{\left(\frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin b \sin c}\right)}=2 \sin \frac{C}{2} \sqrt{\left(\frac{\sin s \sin (s-c)}{\sin a \sin b}\right)}$$

$$4 \sin^2 \frac{C}{2} \cdot \frac{\sin s \sin (s-c)}{\sin a \sin b}=\frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin b \sin c}$$

या, $$4 \sin^2 \frac{C}{2} \cdot \frac{\sin s}{\sin a}=\frac{\sin (s-b)}{\sin c}$$

या, $$4 \sin^2 \frac{C}{2} \sin s \sin c=\sin a \sin (s-b)$$

$$=\sin a \sin (s-a) \qquad \because \text{(i)}$$

$$=\sin a \sin \left\{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)-a\right\}$$

$$=\sin a \sin \frac{c}{2} \qquad \because \text{(i)}$$

$\therefore$ $$4 \sin^2 \frac{C}{2} \sin s \, 2 \sin \frac{c}{2} \cos \frac{c}{2}=\sin a \sin \frac{c}{2}$$

या, $$8 \sin^2 \frac{C}{2} \sin s \cos \frac{c}{2}=\sin a \quad . \quad . \quad . \quad \text{(iii)}$$

अब,

$$\cos s+\sin\frac{c}{2}=\cos s+\sqrt{\left(\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}\right)}$$

$$=\cos s+\frac{\sin(s-a)}{\sin a} \qquad \because \text{(i)}$$

$$=\frac{\cos s\sin a+\sin(s-a)}{\sin s}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\{\sin(s+a)-\sin(s-a)\}+\sin(s-a)}{\sin a}$$

$$=\frac{\sin(s+a)+\sin(s-a)}{2\sin a}$$

$$=\frac{2\sin s\cos a}{2\sin a}$$

$$=\sin s\cot a \qquad . \quad . \quad . \quad \text{(iv)}$$

(iii) और (iv) को गुणा करने पर,

$$8\sin^2\frac{C}{2}\sin s\cos\frac{c}{2}\left(\cos s+\sin\frac{c}{2}\right)=\sin a\sin s\cot a$$

$$\therefore \qquad 8\sin^2\frac{C}{2}\left(\cos s+\sin\frac{c}{2}\right)\cos\frac{c}{2}=\cos a$$

प्रश्न संग्रह 5

1. यदि एक गोलीय त्रिभुज के कोणों का योग चार समकोण के बराबर हो तो सिद्ध करो कि,

$$\cos^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{b}{2}+\cos^2\frac{c}{2}=1 \qquad \text{[आगरा, '54]}$$

2. गोलीय त्रिभुज ABC में सिद्ध करो कि,

$$\frac{\sin\left(\frac{a+b+c}{2}\right)}{\sin a}=\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

S, s, N और n के मानक अर्थों के लिए सिद्ध करो कि,

3. $$\tan\frac{A}{2}=\frac{n}{\sin s\sin(s-a)}$$

4. $$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\frac{\sin(s-c)}{\sin s}$$

5. $$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{2}{\sin^2 s}$$

6. $$\tan\frac{a}{2}=\frac{N}{\cos(S-B)\cos(S-C)}$$

7. $$\tan\frac{a}{2}\tan\frac{b}{2}\tan\frac{c}{2}=\frac{\cos^2 S}{N}$$

8. $$\sin(s-a)=\frac{N}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

9. $$-\cos S=-\frac{n}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

10. $$\cos(S-A)=\frac{n}{2\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}$$

11. (अ) $$\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{\sin(s-c)}{\sin c}$$

(ब) $$\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos(S-C)}{\sin C}$$

12. $$\sin a\tan\frac{A}{2}-\sin b\tan\frac{B}{2}=\sin(a-b)\cot\frac{C}{2}$$

13. गोलीय त्रिभुज ABC में यदि $A=B=2C$ हो तो सिद्ध करो कि,

$$8 \sin\left(a+\frac{c}{2}\right) . \sin^2 \frac{c}{2} . \cos\frac{c}{2}=\sin^3 a$$

14. गोलीय त्रिभुज ABC में यदि,

$$\cos C=-\tan\frac{a}{2}\tan\frac{b}{2},$$ हो तो सिद्ध करो कि,

$$C=A+B$$

15. समत्रिबाहु गोलीय त्रिभुज ABC में सिद्ध करो कि,

$$2 \cos\frac{a}{2}\sin\frac{A}{2}=1.$$

4·8 विविध उदाहरण

उदाहरण 1

(अ) गोलीय त्रिभुज ABC में सिद्ध करो कि,

$$\frac{\sin (A+B)}{\sin C}=\frac{\cos a+\cos b}{1+\cos c}$$ [सागर, 1957]

(ब) गोलीय त्रिभुज ABC में यदि $C=A+B$ है तो सिद्ध करो कि,

$$1-\cos a-\cos b+\cos c=0$$ [नागपुर, 1957]

उपपत्ति—(अ)

$$\frac{\sin (A+B)}{\sin c}=\frac{\sin A \cos B+\cos A \sin B}{\sin C}$$

$$=\left(\frac{\sin A}{\sin C}\right) \cos B+\left(\frac{\sin B}{\sin C}\right) \cos A$$

साइन और कोसाइन सूत्रों से मान रखने पर,

$$=\left(\frac{\sin a}{\sin c}\right)\frac{\cos b-\cos a \cos c}{\sin a \sin c}+\left(\frac{\sin b}{\sin c}\right)\frac{\cos a-\cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$=\frac{(\cos b+\cos a)-\cos a \cos c-\cos b \cos c}{\sin^2 c}$$

$$=\frac{(\cos a+\cos b)(1-\cos c)}{1-\cos^2 c}$$

$$=\frac{\cos a+\cos b}{1+\cos c}$$

(ब) परिणाम (अ) में $C=A+B$ रखने पर,

$$\frac{\sin C}{\sin C}=\frac{\cos a+\cos b}{1+\cos c}$$

$$\therefore \quad 1-\cos a-\cos b+\cos c=0$$

उदाहरण 2. गोलीय त्रिभुज ABC में सिद्ध करो कि,

(अ) $$\frac{\sin c}{\sin C}=\sqrt{\left(\frac{1-\cos a \cos b \cos c}{1+\cos A \cos B \cos C}\right)}$$ [सागर, 1964]

(ब) $$\frac{\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2 c}{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}=\frac{1-\cos a \cos b \cos c}{1+\cos A \cos B \cos C}$$

[आगरा, 1948]

उपपत्ति (अ)

कोसाइन सूत्र से $\cos b \cos c$ का मान रखने पर,

$$1-\cos a \cos b \cos c=1-\cos a(\cos a-\sin b \sin c\times \cos A)$$
$$=(1-\cos^2 a)+\cos a \sin b \sin c\times \cos A$$
$$=K^2 \{\sin^2 A+\cos a \sin B \sin C\times \cos A\}$$

यहाँ, $$K=\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}$$

अब, सम्पूरक कोसाइन सूत्र (4) से,

$$\cos a=\frac{\cos A+\cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

$$\therefore \quad 1-\cos a \cos b \cos c=K^2 \{\sin^2 A+(\cos A \cos B \cos C)\times \cos A\}$$

$$=K^2\,\{(\sin^2 A+\cos^2 A)+\cos A\cos B\cos C)\}$$
$$=K^2\,(1+\cos A\cos B\cos C)$$

$$\therefore \qquad K=\sqrt{\left(\frac{1-\cos a\cos b\cos c}{1+\cos A\cos B\cos C}\right)}$$

परन्तु, $$K=\frac{\sin a}{\sin A} \qquad \because \text{ कल्पना से,}$$

$$\therefore \qquad \frac{\sin a}{\sin A}=\frac{1-\cos a\cos b\cos c}{1+\cos A\cos B\cos C}$$

(ब) उपर्युक्त कल्पना

$$K=\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}\text{ से,}$$

$$\frac{\Sigma\sin^2 a}{\Sigma\sin^2 A}=\frac{\Sigma\sin^2 a}{1/K^2\,\Sigma\sin^2 a}$$
$$=K^2$$

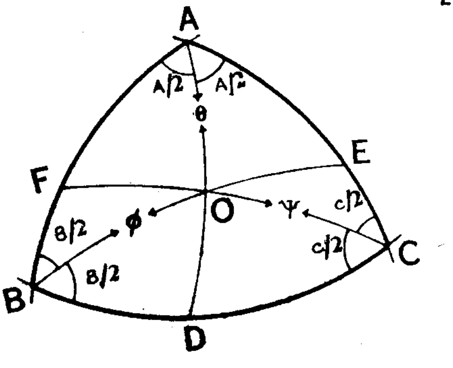
परिणाम (अ) से K का मान रखने पर,

$$\frac{\Sigma\sin^2 a}{\Sigma\sin^2 A}=\frac{1-\cos a\cos b\cos c}{1+\cos A\cos B\cos C}$$

उदाहरण 3. गोलीय त्रिभुज ABC के कोणों के अर्धक चापों के कटन बिन्दु से शीर्ष बिन्दुओं की दूरी क्रमशः θ, ϕ, ψ हैं। सिद्ध करो कि

$$\cos\theta\sin(b-c)+\cos\phi\sin(c-a)+\cos\psi\sin(a-b)=0$$

[उत्कल, 1954]



आकृति 52

मान लो गोलीय त्रिभुज ABC में कोणों के अर्धक AD, BE और CF, परस्पर एक दूसरे को O बिन्दु पर काटते हैं।

दिया है : $AO=\theta$, $BO=\phi$ और $CO=\psi$

त्रिभुज AOB के क्रमागत चार अवयवों

$$\left(\theta, \frac{A}{2}, AB=c, B/2\right)$$

में कोटैन्जेन्ट सूत्र लगाने पर

$$\cos c \cos\frac{A}{2}=\sin c \cot\theta-\sin\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

इसी प्रकार त्रिभुज AOC में कोटैन्जेन्ट सूत्र से,

$$\cos b \cos\frac{A}{2}=\sin b \cot\theta-\sin\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$

[(i) $x \cos b$ . . (ii) $x \cos c$] क्रिया करने पर,

$$O=(\sin b \cos c-\cos b \sin c)\cot\theta-$$

$$\sin\frac{A}{2}\left(\cos c \cot\frac{C}{2}-\cos b \cot\frac{B}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \cot\theta \sin(b-c)=\sin\tfrac{1}{2}A\,(\cos c \cot\tfrac{1}{2}C-\cos b \cot\tfrac{1}{2}B)$$

या, $\cos\theta \sin(b-c)=\sin\theta \sin\frac{A}{2}\left(\cos c \cot\frac{C}{2} \cos b \cot\frac{B}{2}\right)$

साइन सूत्र से, . . . (iii)

$\triangle$ AOB में, $$\frac{\sin\theta}{\sin\frac{B}{2}}=\frac{\sin\phi}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$\therefore \quad \sin\theta \sin\frac{A}{2}=\sin\phi \sin\frac{B}{2} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(iv)}$$

$\triangle AOC$ में, $$\frac{\sin\theta}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{\sin\psi}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$\because \quad \sin\theta \sin\frac{A}{2}=\sin\psi \sin\frac{C}{2} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(v)}$$

(iv) और (v) से,

$$\sin\theta\sin\frac{A}{2}=\sin\phi\sin\frac{B}{2}=\sin\psi\sin\frac{C}{2}=K \text{ (मान लो)}$$

(iii) में मान रखने पर

$$\cos\theta\sin(b-c)=K\left(\cos c\cot\frac{C}{2}-\cos b\cot\frac{B}{2}\right) \quad \text{(vi)}$$

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि (चक्रीय क्रम में अवयवों को बदलने से),

$$\cos\phi\sin(c-a)=K\left(\cos a\cot\frac{A}{2}-\cos c\cot\frac{C}{2}\right) \quad \text{(vii)}$$

और,

$$\cos\psi\sin(a-b)=K\left(\cos b\cot\frac{B}{2}-\cos a\cot\frac{A}{2}\right) \text{(viii)}$$

अन्त के तीन परिणामों को जोड़ने से,

$$\cos\theta\sin(b-c)+\cos\phi\sin(c-a)+\cos\psi\sin(a-b)=0$$

उदाहरण 4. गोलीय त्रिभुज ABC में यदि,

$$A=B=2C$$

हो तो सिद्ध करो कि,

$$\cos a\cos\frac{a}{2}=\cos\left(c+\frac{a}{2}\right)$$

उपपत्ति—दाहिने पक्ष से कोष्टक हटाने पर,

$$\cos a\cos\frac{a}{2}\cos c\cos\frac{a}{2}-\sin c\sin\frac{a}{2}$$

$$\therefore \quad \cos a=\cos c-\sin c\tan\frac{a}{2} \quad . \ . \ . \quad \text{(i)}$$

सम्पूरक को साइन सूत्र (4) से,

$$\cos a=\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\sin B\sin C}$$

$$=\frac{\cos 2C(1+\cos C)}{\sin 2C\sin C} \quad \because \text{ दिया है, } A=B=2C$$

$$=\cot 2C\cot\tfrac{1}{2}C \quad . \ . \ . \quad \text{(ii)}$$

अब (i) के दाहिने पक्ष में, सम्पूरक कोसाइन सूत्र (4) से cos c का, सम्पूरक साइन सूत्र (6) से sin c और अर्धकोण सूत्र (13) से $\tan\frac{a}{2}$ का मान रखने पर,

$$\cos c-\sin c\tan\frac{a}{2}=\frac{\cos C+\cos A\cos B}{\sin A\sin B}-\frac{2N}{\sin A\sin B}$$

$$\times\frac{-\cos S\cos(S-A)}{N}$$

$$=\frac{\cos C+\cos A\cos B+\cos(S+S-A)+\cos(S-S+A)}{\sin A\sin B}$$

$$=\frac{\cos C+\cos A\cos B+\cos(B+C)+\cos A}{\sin A\sin B}$$

$$=\frac{\cos C+\cos^2 2C+\cos 3C+\cos 2C}{\sin^2 2C}$$ ∵ दिया है, $A=B=2C$

$$=\frac{(\cos C+\cos 3C)+\cos 2C(1+\cos 2C)}{\sin^2 2C}$$

$$=\frac{2\cos 2C\cos C+2\cos 2C\cos^2 C}{\sin^2 2C}$$

$$=\frac{2\cos 2C\cos C(1+\cos C)}{4\sin 2C\cos\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}.\sin\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{4\cos 2C\cos C.\cos^2\frac{C}{2}}{4\sin 2C\cos C\cos\frac{C}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$=\cot 2C\cot\frac{C}{2} \quad \ldots \text{(iii)}$$

(ii) और (iii) से अभीष्ट परिणाम प्राप्त होता है।

प्रश्न संग्रह 6

1. गोलीय त्रिभुज ABC में सिद्ध करो कि,

(अ) $$\frac{\sin(a+b)}{\sin c}=\frac{\cos A+\cos B}{1-\cos C}$$

(ब) यदि $a+b=\pi+c$ हो तो सिद्ध करो कि,

$$1+\cos A+\cos B-\cos C=0$$

2. गोलीय त्रिभुज ABC में सिद्ध करो कि,

(अ) $$\frac{\sin(B-C)}{\sin A}=\frac{\cos c-\cos b}{1-\cos a}$$

(ब) $$\frac{\sin(b-c)}{\sin a}=\frac{\cos C-\cos B}{1+\cos A}$$

[**टिप्पणी** । प्रश्न 1 और 2, दलाम्ब्र सादृश्यताओं से सरलता से हल हो सकते हैं। देखो धारा (4.11), (4.14)—उदाहरण 2 ।

3. गोलीय त्रिभुज ABC में भुजा b और c एक दूसरे की सम्पूरक हैं। सिद्ध करो कि,

$$(\sin c+\cos c)\sin A=2\cos^2\frac{a}{2}\sin(B+C)$$

4. गोलीय त्रिभुज ABC की भुजा AB और AC के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला दीर्घवृत्त चाप, B से C की ओर बढ़ाई गई भुजा BC को D बिन्दु पर मिलता है। सिद्ध करो कि,

(अ) $BD+CD=\pi$

(ब) $$\cos AD=\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{c-b}{2}\operatorname{cosec}\frac{a}{2}$$

5. गोलीय त्रिभुज ABC में सिद्ध करो कि,

$$\sin b\sin c+\cos b\cos c\cos A$$
$$=\sin B\sin C-\cos B\cos C\cos a$$ [उत्कल, 1955]

[संकेत—कोसाइन सूत्र से,

वाम पक्ष $=\sin b \sin c+(\cos a-\sin b \sin c \cos A) \cos A$

$$=\sin b \sin c\,(1-\cos^2 A)+\cos a \cos A$$

$$=\sin B \sin C \sin^2 a+\cos a \cos A$$

$$=\sin B \sin C\,(1-\cos^2 a)+\cos a \cos A$$

$$=\sin B \sin C-\cos a\,(\cos A-\sin B \sin C \cos a)$$

$$=\sin B \sin C+\cos a\,(-\cos B \cos C)$$

$$=\sin B \sin C-\cos B \cos C \cos a]$$

6. गोलीय त्रिभुज ABC में सिद्ध करो कि,

$\cot a \sin c=\cot A \sin B+\cos c \cos B$ [विक्रम, 1962]

[संकेत—दाहिने दक्ष को साइन और कोसाइन के पदों में बदलो और साइन तथा कोसाइन सूत्रों का अनुप्रयोग करो ।]

7. गोलीय त्रिभुज ABC में यदि, $C=A+B$ हो सिद्ध करो कि,

(i) भुजा AB का मध्य बिन्दु त्रिभुज के तीनों शीर्षों से समान दूरी पर है ।

या

(ii) बड़ी भुजा, अपने मध्य बिन्दु को सम्मुख शीर्ष से मिलाने वाले चाप की दुगनी होती है ।

8. गोलीय त्रिभुज ABC की भुजाओं की आधी लम्बाई की भुजाओं वाला एक और त्रिभुज $A'B'C'$ बनाया गया । सिद्ध करो कि,

$\cos A=\cos A'-\frac{1}{2} \tan \frac{b}{2} \tan \frac{c}{2} \sin^2 A'$ [आगरा, 1958]

[संकेत—

$$\cos A'=\frac{\cos \frac{a}{2}-\cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}{\sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}}$$

$$\sin A'=\frac{\sqrt{(1-\Sigma \cos^2 \frac{1}{2} a+2\,\pi \cos \frac{1}{2} a)}}{\sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}$$

दाहिने पक्ष में इन मानों को रखकर सरल करने पर,

$$\text{दाहिना पक्ष} = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \cos A]$$

9. गोलीय त्रिभुज ABC में सिद्ध करो कि,

$$\sin (b+c) \sin (b-c) \sin^2 A = \sin (B+C) \sin (B-C) \sin^2 a$$

[संकेत—उदाहरण 1 और 2 के परिणामों का अनुप्रयोग करो।]

10. गोलीय त्रिभुज ABC में यदि भुजा AB का मध्य बिन्दु D है तो सिद्ध करो कि,

$$\cot BCD - \cot ACD = \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin A \sin B \sin C}$$

$$= \frac{\sin (a+b) \sin (a-b)}{\sin a \sin b \sin c}$$

11. गोलीय त्रिभुज ABC में सिद्ध करो कि,

$$\cos a = \cos (b+c) + 2 \sin b \sin c \cos^2 \frac{A}{2}$$

[संकेत—$2 \cos^2 \frac{A}{2} = 1 + \cos A$]

12. यदि गोलीय त्रिभुज ABC की भुजा BC एक चतुर्थांश है तो सिद्ध करो कि,

$$\cos A + \cos B \cos C = 0$$

13. गोलीय त्रिभुज ABC में यदि शीर्ष A और B से खींची जाने वाली मध्यगत रेखाएं बराबर हैं तो सिद्ध करो कि,

या तो $a = b$

अथवा, $\sin^2 \frac{c}{2} = \cos^2 \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} + \cos^2 \frac{b}{2}$

[संकेत—धारा (4.2.3) के उदाहरण 2 के परिणाम का अनुप्रयोग करो।]

14. गोलीय त्रिभुज ABC में n और N के मानक अर्थों के लिये सिद्ध करो कि,

(अ) $4\,nN = \sin a \sin b \sin c \sin A \sin B \sin C$

(ब) $\dfrac{n^2}{N^2} = \dfrac{1-\cos a \cos b \cos c}{1+\cos A \cos B \cos C}$.

15. गोलीय त्रिभुज ABC इस प्रकार का है कि भुजा AB को व्यास मान कर खींचा गया लघुवृत्त बिन्दु C में से होकर जाता है। सिद्ध करो कि,

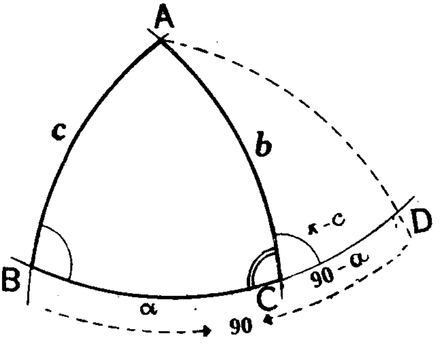
$$\cot A \cot B = \cos^2 \frac{c}{2}.$$

द्वितीय खण्ड

पाँच और छः अवयवों से संबन्धित सूत्र

4·9. साइन-कोसाइन सूत्र

किसी गोलीय त्रिभुज की तीन भुजाओं और दो कोणों के बीच सम्बन्ध स्थापित करना।



आकृति 53

मान लो त्रिभुज ABC में, भुजाएँ a, b, c और कोण B तथा C के बीच सम्बन्ध स्थापित करना है।

रचना—

BC को D बिन्दु तक इस प्रकार बढ़ाओ कि

$BD = 90°$, AD को मिलाओ।

$CD = (90° - a)$ . . . . (i)

उपपत्ति। त्रिभुज ABD में, कोसाइन सूत्र (1) से,

$$\cos AD = \cos AB \cos BD + \sin AB \sin BD \cos B$$
$$= \cos c \cos 90^\circ + \sin c \sin 90^\circ \cos B$$
$$= \sin c \cos B \quad . \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$

और त्रिभुज ACD में, इसी प्रकार,

$$\cos AD = \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos c \quad . \quad . \quad . \quad \text{(iii)}$$

(ii) और (iii) से, $\cos AD$ के मान बराबर करने पर,

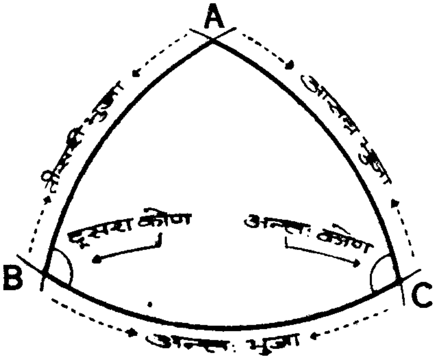
$$\sin c \cos B = \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C \quad . \quad . \quad (14)$$

इस सूत्र में, त्रिभुज के अवयवों को चक्रीय क्रम में बदलने पर निम्नलिखित दो सूत्र और प्राप्त किये जा सकते हैं।

$$\sin a \cos C = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A \quad . \quad . \quad (15)$$

और, $\sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B \quad . \quad . \quad (16)$

4·9.1. टिप्पणी 1



आकृति 54

त्रिभुज की दी हुई तीन भुजाओं और दो कोणों में यदि

(i) किसी एक कोण को अन्तः कोण जैसे C,

(ii) शेष बचे कोण को दूसरा कोण जैसे B,

(iii) जिस भुजा के दोनों छोरों पर दिये हुए कोण स्थित हैं उसे अन्तःभुजा जैसे भुजा $BC = a$,

(iv) अन्तः कोण बनाने वाली एक अन्तः भुजा को छोड़ कर दूसरी भुजा को आसन्न भुजा, जैसे भुजा $AC=b$, और

(v) शेष भुजा को तीसरी भुजा, जैसे भुजा $AB=c$, कहें तो साइन-कोसाइन सूत्र को निम्न लिखित भाषा में स्मरण रखा जा सकता है ।

साइन-कोसाइन सूत्र

[sin (अन्तः भुजा). cos (आसन्न भुजा)

—cos (अन्तः भुजा). sin (आसन्न भुजा). cos (अन्तः कोण)]

= [sin (तीसरी भुजा). cos (दूसरा कोण)]

मान रखने पर हमें प्राप्त होता है—

$\sin a \cos b - \cos a \sin b \cos B = \sin c \cos B$, जो साइन-कोसाइन सूत्र (14) है ।

अब मान लो यदि B को अन्तः कोण माने तो $\angle A=$ दूसरा कोण होगा । अन्तः भुजा $=c$, आसन्न भुजा $=a$ और तीसरी भुजा $=b$ होगी और मान रखने पर हमें निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होगा,

$$\sin c \cos a - \cos c \sin a \cos B = \sin b \cos A$$

जो साइन-कोसाइन सूत्र (16) है । अतः दिये हुए दो कोणों में किसी भी एक को अन्तः कोण मान कर, उस आधार पर दूसरे अवयवों का नाम-करण करके, ऊपर दर्शाये अनुसार, तीनों साइन-कोसाइन सूत्र सरलता पूर्वक लिखे जा सकते हैं ।

टिप्पणी 2

साइन-कोसाइन सूत्र की उपयोगिता—

(i) गोलीय त्रिभुज के चार अवयवों का मान यदि ज्ञात हो तो पाँचवें अवयव का मान ज्ञात कर सकते हैं ।

(ii) इस सूत्र का विशेष उपयोग त्रिभुजों के निर्धारण में, संदिग्ध स्थितियों में से स्पष्ट ठीक हल ज्ञात करने में होता है । जैसे,

मान लो, किसी त्रिभुज में दो भुजाएँ (a, b) और उनके बीच का कोण C ज्ञात है तब त्रिभुज का निर्धारण करने में अर्थात आज्ञात भुजा c और कोण B

का मान ज्ञात करने के लिए हम कोसाइन सूत्र

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

और साइन सूत्र

$$\frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

या,

$$\sin B = \frac{\sin b \sin C}{\sin c} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$

का अनुप्रयोग करते हैं। कोसाइन सूत्र में a, b और C के ज्ञात मान स्थापित करके हमें c का मान प्राप्त होता है। परन्तु c के इस मान के लिये और b और C के ज्ञात (दिये हुए) मानों को (ii) में स्थापित करने पर हमें B के दो मान ज्ञात होगे। इस संदिग्ध स्थिति (B का कौन सा मान ठीक है) से छुटकारा पाने के लिये हम साइन-कोसाइन सूत्र

$$\cos c \cos B = \sin a \cos b - \cos a \sin b \cos c$$

का प्रयोग करते हैं। B के जिस मान के लिये यह सूत्र सत्य हो वही B का संदिग्धतारहित मान होगा। या सीधे इस सूत्र से ही B का मान ज्ञात कर सकते हैं (अध्याय 6 देखिये)।

खगोल विज्ञान (Astronomy) में भी साइन-कोसाइन सूत्र इसी अर्थ में उपयोगी सिद्ध होता है। किसी खगोलीय पिंड का राइट-असेन्शन (विषुवांश, Right ascension) और डेक्लीनेशन (अपक्रम, Declination) ज्ञात होने पर, उसके खगोलीय रेखांश तथा अक्षांश ज्ञात करने का प्रश्न किसी गोलीय त्रिभुज के निर्धारण के समान है, जिसकी दो भुजाएँ और उनके बीच का कोण ज्ञात है।

4·10. संपूरक साइन-कोसाइन सूत्र

मान लो, त्रिभुज $A'B'C'$ त्रिभुज ABC का ध्रुवीय त्रिभुज है। अतः

$$\left.\begin{array}{l} a' = \pi - A,\ b' = \pi - B',\ c' = \pi - C \\ A' = \pi - a, B' = \pi - b', C' = \pi - c \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

अब ध्रुवीय त्रिभुज $A'B'C'$ में साइन-कोसाइन सूत्र (14) से,

$$\sin c' \sin B' = \sin a' \cos b' - \cos a' \sin b' \cos C'$$

(i) से अवयवों के मान रखने पर,

$$\sin(\pi - C) \cos(\pi - b) = \sin(\pi - A) \cos(\pi - B) - \cos(\pi - a) \sin(\pi - B) \cos(\pi - c)$$

या, $-\sin C \cos b = \sin A \cos B - \cos A \sin B \cos c$

या, $\sin C \cos b = \sin A \cos B + \cos A \sin B \cos c$ (17)

अवयवों को चक्रीय क्रम में बदलने पर शेष दो और सूत्र ज्ञात किये जा सकते हैं।

छः अवयवों से संबंधित सूत्र

दलाम्ब्र (Delambre's) और नैपियर (Napier's) सादृश्यताएँ (Analogies)

4·11. दलाम्ब्र सादृश्यताएँ (Delambre's Analogies)

$$\frac{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\cos\frac{c}{2}} \quad . \; . \; . \quad (18)$$

$$\frac{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\sin\frac{c}{2}} \quad . \; . \; . \quad (19)$$

$$\frac{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\frac{c}{2}} \quad . \; . \; . \quad (20)$$

$$\frac{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\sin\frac{c}{2}} \quad . \; . \; . \quad (21)$$

उपर्युक्त सादृश्यताओं में से सर्वप्रथम हम सादृश्यता (18) स्थापित करेंगे। अर्द्ध कोण सूत्र (8) और (9) से,

$$\cos\frac{A+B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sin s \sin(\;-a}{\sin b \sin c}\right)} \sqrt{\left(\frac{\sin s \sin(\;-b)}{\sin a \sin c}\right)}$$

$$- \sqrt{\left(\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}\right)} \sqrt{\left(\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a \sin c}\right)}$$

$$=\frac{\sin s}{\sin c}\sqrt{\left(\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin b\sin a}\right)}$$

$$-\frac{\sin(s-c)}{\sin c}\sqrt{\left(\frac{\sin(s-b)\sin(s-a)}{\sin b\sin a}\right)}$$

$$=\frac{\sin s-\sin(s-c)}{\sin c}\sqrt{\left(\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}\right)}$$

$$=\frac{2\cos\left(\frac{s+s-c}{2}\right)\sin\left(\frac{s-s+c}{2}\right)}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}.\sin\frac{C}{2}$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\cos\frac{c}{2}}\sin\tfrac{1}{2}C \qquad \because\ \frac{2s-c}{2}=\frac{a+b}{2}$$

$$\therefore \qquad \frac{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\sin C/2}=\frac{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\cos c/2}$$

शेष तीनों सादृश्यताएँ भी इसी प्रकार स्थापित की जा सकती हैं। ध्रुवीय त्रिभुज के अवयवों के बीच दलाम्ब्र सादृश्यताओं के अनुप्रयोग से कोई नया परिणाम प्राप्त नहीं होता है क्योंकि सादृश्यताएँ (18) और (21) तथा (19) और (20) स्वयं ही परस्पर सम्पूरक हैं। उपर्युक्त चारों समानुपात शोधकर्त्ता गणितज्ञ दलाम्ब्र (Delambre) के नाम पर दलाम्ब्र-सादृश्यताओं के नाम से विख्यात हैं।

4·12. नैपियर सादृश्यताएँ (Napier's Analogies)

निम्नलिखित समानुपात, इनके शोधकर्त्ता गणितज्ञ नैपियर (Napier) के नाम पर, नैपियर सादृश्यताओं के नाम से विख्यात हैं।

$$\frac{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\cot\frac{C}{2}}=\frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)} \qquad \ldots \qquad (22)$$

$$\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cot\frac{C}{2}}=\frac{\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

$$\frac{\tan\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\tan\frac{c}{2}}=\frac{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

$$\frac{\tan\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\tan\frac{c}{2}}=\frac{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

उपर्युक्त सामान्यताओं कों विभिन्न विधियों द्वारा स्थापित किया जा सकता है। उदाहरणार्थ—

विधि—1

$$\tan\frac{A+B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}$$

अर्धकोण सूत्रों द्वारा हम सिद्ध कर चुके हैं कि, (देखो प्रश्न 4, प्रश्न संग्रह 5)

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\frac{\sin(s-c)}{\sin s}$$

$$\therefore \quad \tan\left(\frac{A+B}{2}\right)\tan\frac{C}{2}=\frac{\frac{\sin(s-b)}{\sin s}+\frac{\sin(s-a)}{\sin s}}{1-\frac{\sin(s-c)}{\sin s}}$$

$$=\frac{\sin(s-b)+\sin(s-a)}{\sin s-\sin(s-c)}$$

$$=\frac{2\sin\left(\frac{2s-a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{s-b-s+a}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{2s-c}{2}\right)\sin\left(\frac{s-s+c}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\frac{c}{2} \quad \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\sin\frac{c}{2}\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

$$\therefore \qquad \frac{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\cot\frac{C}{2}} = \frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

विधि 2। साइन सूत्र (5) से,

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = K \text{ (मान लो)} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

$$\therefore \qquad \sin A + \sin B = K(\sin a + \sin b) \; . \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$

$$\text{और } \sin A - \sin B = K(\sin a - \sin b) \; . \quad . \quad . \quad \text{(iii)}$$

सम्पूरक कोसाइन सूत्र (3) से,

$$\cos A + \cos B \cos C = \sin B \sin C \cos a \; . \quad . \quad . \quad \text{(iv)}$$

$$= (K \sin b) \sin C \cos a \quad \because \text{(i)}$$

इसी प्रकार,

$$\cos B + \cos A \cos C = (K \sin a) \sin C \cos b \; . \quad . \quad . \quad \text{(v)}$$

(iv) और (v) को जोड़ने से,

$$(\cos A + \cos B)(1 + \cos C) = K \sin C(\sin b \cos a + \sin a \cos b)$$

$$= K \sin C \sin(a+b) \quad . \quad . \quad . \text{(vi)}$$

(ii) और (vi) से

$$\frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \frac{K(\sin a + \sin b)}{\left\{\frac{K \sin C \sin(a+b)}{1+\cos C}\right\}}$$

$$= \frac{K(\sin a + \sin b)(1 + \cos C)}{K \sin C \sin(a+b)}$$

सरल त्रिकोणमिति से,

वाम पक्ष $= \tan\frac{A+B}{2}$ . . . (vii)

$$=\frac{2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right).\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)2\cos^2\frac{C}{2}}{2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}.\cot\frac{C}{2} \quad . \; . \; . \quad \text{(viii)}$$

(vii) और (viii) से,

$$\frac{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\cot\frac{C}{2}}=\frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)} \quad . \; . \; . \quad (22)$$

इसी प्रकार, (iii) और (vi) से,

$$\frac{\sin A-\sin B}{\cos A+\cos B}=\frac{\sin a-\sin b}{\sin(a+b)}\cdot\frac{1+\cos C}{\sin C}$$

$$\therefore \qquad \tan\left(\frac{A-B}{2}\right)=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\times\cot\frac{C}{2}$$

या,

$$\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cot\frac{C}{2}}=\frac{\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)} \quad . \; . \; . \quad (23)$$

जब, साहृश्यता (22) और (23) में ध्रुवीय त्रिभुज के अवयवों के मान प्रतिस्थापित करके शेष साहृश्यताएँ प्राप्त कर सकते हैं।

विधि 3। दलाम्ब्र साहृश्यताओं से सीधे-सीधे (भाग द्वारा) नैपियर साहृश्यताएँ प्राप्त कर सकते हैं। जैसे,

दलाम्ब्र साहृश्यता (20) और (18),

$$\frac{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\frac{c}{2}}$$

और,
$$\frac{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\cos\frac{c}{2}}$$

भाग की क्रिया से,
$$\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\cot C/2}=\frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)} \quad . \ . \ . \quad (22)$$

इसी प्रकार, शेष नैपियर सादृश्यताएँ भी दलाम्ब्र सादृश्यताओं से साधारण भाग की क्रिया द्वारा निगमित की जा सकती हैं।

4·12.1. टिप्पणी

दलाम्ब्र और नैपियर सादृश्यताओं को ध्यानपूर्वक देखने से हम पाते हैं कि,

(अ) जब वाम पक्ष में योग फलन हैं, जैसे $\tan\frac{A+B}{2}$, $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)$, $\tan\left(\frac{a+b}{2}\right)$ इत्यादि, तो दाहिने पक्ष में कोसाइन फलन होते हैं।

(ब) और जब वाम पक्ष में अन्तर फलन होते हैं, जैसे $\tan\frac{A-B}{2}$, $\tan\frac{a-b}{2}$, इत्यादि, तो दाहिने पक्ष में केवल साइन फलन होते हैं।

उपर्युक्त अवलोकन इन सादृश्यताओं को स्मरण रखने में उपयोगी सिद्ध हो सकते हैं।

4·13. उदाहरण 1

- नैपियर सादृश्यताओं से दलाम्ब्र सादृश्यताओं का निगमन करो।

क्रिया—नैपियर सादृश्यता (22)
$$\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)=\cot\frac{C}{2}\left\{\frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}\right\}$$

सरल त्रिकोणमिति से,

$$\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$$

$$\therefore \qquad \sec^2\left(\frac{A+B}{2}\right) = 1+\frac{\cos^2\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{a+b}{2}\right)} \times \frac{\cos^2\frac{C}{2}}{\sin^2\frac{C}{2}}$$

या

$$\frac{\sin^2\frac{C}{2}}{\cos^2\left(\frac{A+B}{2}\right)} = \frac{\sin^2\frac{C}{2}\left\{1+\cos(a+b)\right\}+\cos^2\frac{C}{2}\left\{1+\cos(a+b)\right\}}{2\cos^2\left(\frac{a+b}{2}\right)} \quad . \ . \quad \text{(i)}$$

$$\because \ 2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1+\cos\theta$$

अब, दाहिने पक्ष का,

$$\text{अंश} = \frac{\left(\sin^2\frac{C}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\right)+\sin^2\frac{C}{2}(\cos a\cos b-\sin a\sin b)}{\cos^2\frac{C}{2}(\cos a\cos b+\sin a\sin b)}$$

$$=1+\cos a\cos b\,(\sin^2 C/2+\cos^2 C/2)+$$
$$\sin a\sin b\,(\cos^2 C/2-\sin^2 C/2)$$

$$=1+\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C$$

$=1+\cos c$ ∵ कोसाइन सूत्र (i)

$$=2\cos^2 C/2$$

(i) में मान स्थापित करके सरल करने पर,

$$\frac{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\cos\frac{c}{2}}$$

यह दलाम्ब्र सादृश्यता (18) है । इसी प्रकार, शेष सादृश्यताएँ भी निगमित की जा सकती हैं ।

उदाहरण 2

गोलीय त्रिभुज ABC में सिद्ध करो कि,

$$\frac{\sin (A+B)}{\sin C}=\frac{\cos a+\cos b}{1+\cos c}$$ [सागर, '57]

उपपत्ति । दलाम्ब्र सादृश्यता (18) और (20),

$$\frac{\cos \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{C}{2}}=\frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}$$

$$\frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}=\frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}$$

गुणा करने पर,

$$\frac{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A+B}{2}}{2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}=\frac{2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}{2 \cos^2 \frac{c}{2}}$$

सरल त्रिकोणभिति से,

$$\frac{\sin (A+B)}{\sin C}=\frac{\cos a+\cos b}{1+\cos c}$$

टिप्पणी—यह प्रश्न साइन और कोसाइन सूत्रों के अनुप्रयोग से उदाहरण 1, धारा (4.8) में हल किया गया है। दोनों विधियों की तुलना करो।

उदाहरण 3

गोलीय त्रिभुज ABC में सिद्ध करो कि,

$$\sin(a+b)\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) \tan \frac{C}{2}=\sin (a-b) \cot \left(\frac{A-B}{2}\right)\cot\frac{C}{2}$$

उपपत्ति—नैपियर सादृश्यता (22) और (23),

$$\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\cot\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}$$

$$\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cot\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}$$

गुणा करने पर,

$$\frac{\tan\frac{A+B}{2}\tan\frac{A-B}{2}}{\cot^2\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}\sin\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a+b}{2}}$$

$$=\frac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)}$$

$$\therefore\quad \sin(a+b)\tan\frac{A+B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

$$=\sin(a-b)\cot\frac{A-B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

उदाहरण 4. गोलीय त्रिभुज ABC में सिद्ध करो कि,

$$\cos a\tan B+\cos b\tan A+\tan C$$

$$=\cos a\cos b\tan A\tan B\tan C$$

[आगरा, 1962]

विधि-1 (साइन-कोसाइन सूत्र के अनुप्रयोग से) साइन-कोसाइन सूत्र (16),

$$\cos b\sin a\cos C+\cos A\sin c=\cos a\sin b$$

साइन सूत्र से,

$$\cos b\,(K\sin A)\cos C+\cos A\,(K\sin C)$$

$$=\cos a\,(K\sin B)$$

यहाँ K कोई अचर राशि है।

या, $$\cos b \sin A \cos C + \cos A \sin C = \cos a \sin B$$
$$= \cos a \tan B . \cos B$$

सम्पूरक-कोसाइन सूत्र (3) से $\cos B$ का मान रखने पर,

$$\cos b \sin A \cos C + \cos A \sin C$$
$$= \cos a \tan B \{-\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b\}$$

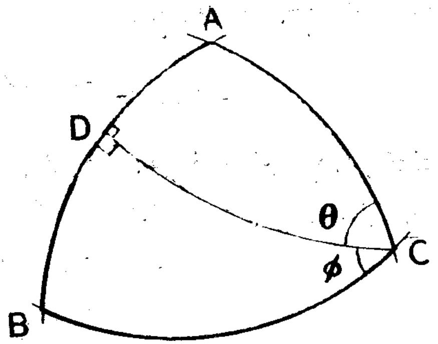
दोनों पक्षों में $\cos A \cos C$ का भाग देने पर,

$$\cos b \tan A + \tan C = \cos a \tan B$$
$$\{-1 + \cos b \tan A \tan C\}$$

या, $$\cos a \tan B + \cos b \tan A + \tan C$$
$$= \cos a \cos b \tan A \tan B \tan C.$$

विधि-2 रचना—शीर्ष बिन्दु C से आधार AB पर CD लम्ब चाप खींचो। मान लो,

$$\angle ACD = \theta \text{ और } \angle BCD = \phi$$



आकृति 55

त्रिभुज ACD में सम्पूरक कोसाइन सूत्र (3) से,

$$\cos 90° = -\cos A \cos \theta + \sin A \sin \theta \cos b$$

या, $$\cot \theta = \tan A \cos b \quad . \; . \; . \quad \text{(i)}$$

इसी प्रकार, त्रिभुज BCD से,

$$\cot \phi = \tan B \cos a \quad . \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$

परन्तु, $\angle C = \theta + \phi$ ∵ रचना से।

∴ $$\cot C = \cot(\theta + \phi)$$

$$= \frac{\cot \theta \cot \phi - 1}{\cot \theta + \cot \phi}$$

(i) और (ii) से मान रखने पर,

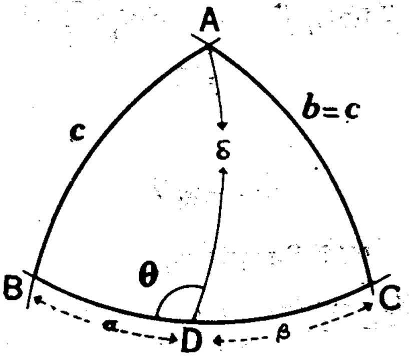
$$\cot C = \frac{\cos a \cos b \tan A \tan B - 1}{\cos a \tan B + \cos b \tan A}$$

अतः

$$\cos a \tan B + \cos b \tan A + \tan C = \cos a \cos b \tan B \tan C$$

उदाहरण 5. समद्विबाहु गोलीय त्रिभुज ABC के शीर्ष A से एक चाप खींचा गया जो आधार BC को, D बिन्दु पर इस प्रकार काटता है कि $BD = \alpha$, $DC = \beta$ और $AD = \delta$, सिद्ध करो कि,

$$\tan \tfrac{1}{2}\alpha \tan \tfrac{1}{2}\beta = \tan \tfrac{1}{2}(b + \delta) \tan \tfrac{1}{2}(b - \delta)$$



आकृति 56

मान लो समद्विबाहु त्रिभुज ABC में, $b = c$ इसलिए,

$$\angle B = \angle C \text{।}$$

और मान लो,

$$\angle ADB = \theta$$

∴ $$\angle ADC = \pi - \theta$$

त्रिभुज ABD में नेपियर सादृश्यता (24) से,

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(b+\delta)}{\tan \frac{1}{2}\alpha}=\frac{\cos \frac{1}{2}(\theta-B)}{\cos \frac{1}{2}(\theta+B)} \qquad \text{(i)}$$

इसी प्रकार, त्रिभुज ADC में नेपियर सादृश्यता (25) से,

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(b-\delta)}{\tan \frac{1}{2}\beta}=\frac{\sin \frac{1}{2}(\pi-\theta-C)}{\sin \frac{1}{2}(\pi-\theta+C)}$$

परन्तु,

$$\angle B=\angle C$$

$$\therefore \qquad \frac{\tan\left(\frac{b-\delta}{2}\right)}{\tan \beta/2}=\frac{\cos\left(\frac{\theta+B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta-B}{2}\right)}$$

(i) और (ii) का गुणा करने पर,

$$\frac{\tan\left(\frac{b+\delta}{2}\right)\tan\left(\frac{b+\delta}{2}\right)}{\tan \alpha/2 \tan \beta/2}=\frac{\cos\left(\frac{\theta-B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta+B}{2}\right)}\times\frac{\cos\left(\frac{\theta+B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta-B}{2}\right)}$$

$$=1$$

प्रश्न संग्रह 7

गोलीय त्रिभुज ABC में सिद्ध करो कि,

1. $\frac{\sin (A-B)}{\sin C}=\frac{\sin b-\sin a}{1-\cos c}$

2. $\frac{\sin (a-b)}{\sin c}=\frac{\cos B-\cos A}{1+\cos C}$

3. $\frac{\sin (b+c)}{\sin a}=\frac{\cos B+\cos C}{1-\cos C}$

4. $\cos^2 \frac{A}{2}=\sin^2\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos^2 \frac{a}{2}+\sin^2\left(\frac{B-C}{2}\right)\sin^2 \frac{A}{2}$

5. $\sin^2 \frac{a}{2} = \sin^2 \left(\frac{b-c}{2}\right) \cos^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \left(\frac{b+c}{2}\right) \sin^2 \frac{A}{2}$

6. $\cos^2 \frac{a}{2} = \cos^2 \left(\frac{b-c}{2}\right) \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \left(\frac{b+c}{2}\right) \sin^2 \frac{A}{2}$

7. यदि गोलीय त्रिभुज ABC की भुजाएँ a, b, c समान्तर श्रेणी (Arithmetical Progression) में हैं तो सिद्ध करो कि

$$\cos\left(\frac{C-A}{2}\right) = \frac{\sin^2 \frac{B}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}}$$

उपपत्ति । a, b, c समान्तर श्रेणी में हैं

$$\therefore \qquad b = \frac{a+c}{2} \qquad \ldots \text{(i)}$$

और

$$a+b+c = 2s$$

$$\therefore \qquad \frac{b}{2} = (s-b) \qquad \ldots \text{(ii)}$$

दलाम्ब्र सादृश्यता (19) से,

$$\frac{\cos\left(\frac{C-A}{2}\right)}{\sin \frac{B}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{c+a}{2}\right)}{\sin b/2}$$

$$= \frac{\sin b}{\sin (s-b)} \quad \because \text{(i) \& (ii)} \qquad \ldots \text{(iii)}$$

अर्ध कोण सूत्र (8) से,

$$\left\{ \frac{\sin \frac{B}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}} \right\} \text{ में मान रखने पर,}$$

$$\frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{\sqrt{\left(\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\sin c}\right)}}{\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin a\sin b}}}$$

$$=\frac{\sin b}{\sin(s-b)} \qquad \ldots \quad \text{(iv)}$$

(iii) और (iv) से,

$$\frac{\cos\left(\frac{C-A}{2}\right)}{\sin\frac{B}{2}}=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

8. समद्विबाहु गोलीय त्रिभुज ABC के आधार BC में, D एक स्वेच्छ बिन्दु है। सिद्ध करो कि,

$$\frac{\cos\left(\frac{BD-DC}{2}\right)}{\cos\frac{BC}{2}}=\frac{\cos AD}{\cos AB}$$

[संकेत—उदाहरण 5 की आकृति के अनुसार, परिणाम निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं—

$$\frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}=\frac{\cos\delta}{\cos b}$$

और इससे अभीष्ट परिणाम स्पष्ट है।]

9. यदि किसी गोलीय त्रिभुज के किन्हीं दो कोणों का योग π से कम हो तो सिद्ध करो कि उन कोणों की सम्मुख भुजाओं का योग गोले के अर्ध दीर्घ-वृत्त से कम होगा।

[संकेत—

$$B+C<\pi$$

$$\frac{B+C}{2}<\pi/2$$

डेलाम्बर सादृश्यता से,

$$\frac{\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{\cos\left(\frac{b+c}{2}\right)}{\cos\frac{c}{2}}$$

अब,

$$\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)>0 \qquad \because \quad \frac{B+C}{2}<\pi/2$$

$$\sin\ \frac{C}{2}\quad >0 \qquad \because \quad C<\pi$$

$$\cos\ \frac{c}{2}\quad >0 \qquad \because \quad c<\pi$$

$\therefore$ $$\cos\left(\frac{b+c}{2}\right)>0$$

$\therefore$ $$\frac{b+c}{2}<\pi/2$$

या, $b+c<\pi$]

10. (अ) गोलीय त्रिभुज ABC में सिद्ध करो कि,

$$\cos s=\frac{\cos A+\cos B+\cos C-1}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{1-\sin^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}}{2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}$$

(ब) उपर्युक्त परिणाम के अनुप्रयोग से सिद्ध करो कि, यदि त्रिभुज ABC में $A=\frac{\pi}{5}$, $B=\frac{\pi}{3}$ और $C=\frac{\pi}{2}$ हो तो $a+b+c=\pi/2$ ।

$$\left[\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}+1}{4} \text{ और } \sin 18^\circ=\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right]$$

[सागर, '62, विक्रम, '61]

11. गोलीय त्रिभुज ABC सिद्ध करो कि,

(अ) $$\sin S = \frac{1+\cos a+\cos b+\cos C}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

$$= \frac{\cos^2\frac{a}{2}+\cos^2+\frac{b}{2}+\cos^2\frac{c}{2}-1}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

(ब) उपर्युक्त परिणाम के अनुप्रयोग से सिद्ध करो कि यदि $a=b=\pi/3$ और $c=\pi/2$ हो तो,

$$A+B+C=\pi+\cos^{-1}\left(\frac{7}{9}\right)$$

12. एक गोलीय त्रिभुज में यदि कोई दो कोण क्रमशः उनकी सम्मुख भुजाओं के तुल्य हों तो सिद्ध करो कि, या तो शेष कोण, शेष भुजा का सम्पूरक होगा, अथवा त्रिभुज में दो भुजाएँ चतुर्थांश के तुल्य होंगी, दो कोण समकोण होंगे और शेष तृतीय कोण तृतीय भुजा के तुल्य होगा।

[संकेत—दलाम्ब्र सादृश्यताओं में $A=a$ और $B=b$ रखने पर, या तो,

$$\cos\frac{C}{2}=\sin\frac{c}{2},\ \sin\frac{C}{2}=\cos\frac{c}{2}$$

$$\therefore \quad \sin(\pi/2-C/2)=\sin c/2$$

$$\therefore \quad C=\pi-c$$

अथवा, $$\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)=\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$$

और यह तब ही सम्भव है जब $b=a=\pi/2$ हो और इसलिए

$A=B=\pi/2$ हो।

इस स्थिति में बिन्दु C, AB का ध्रुव होगा, इसलिये $C=c$]

13. एक गोलीय त्रिभुज में, जिसकी प्रत्येक भुजा $\pi/2$ से कम है, सिद्ध करो कि इस स्थिति में प्रत्येक बहिष्कोण उसके किसी भी सम्मुख अन्तः कोण से बड़ा होता है।

14. गोलीय त्रिभुज ABC में, यदि $C=A+B$ हो तो सिद्ध करो कि

$$1-\cos a-\cos b+\cos c=0$$

[नागपुर, '57]

15. गोलीय त्रिभुज ABC में, यदि $a+b=\pi+c$ हो तो, सिद्ध करो कि,

$$1+\cos A+\cos B-\cos C=0$$

[संकेत—उदाहरण 2 और प्रश्न 3 का अनुप्रयोग करो ।]

अध्याय 5

समकोण गोलीय त्रिभुज

(RIGHT ANGLED SPHERICAL TRIANGLE)

5·1. गोलीय त्रिभुज में छः अवयव, तीन भुजाएँ और तीन कोण होते हैं। पिछले अध्याय में हमने त्रिभुज के छः अवयवों में से क्रमशः चार, पाँच और छः के बीच विभिन्न सम्बन्ध स्थापित किये हैं। मूलतः हमारा उद्देश्य गोलीय त्रिभुजों का निर्धारण है, अर्थात छः अवयवों में से पर्याप्त अवयवों के मान ज्ञात होने पर शेष के मान निकालना। पिछले अध्याय के सूत्र हमारे इस उद्देश्य की पूर्ति करते हैं। सामान्यतः एक गोलीय त्रिभुज के तीन अवयवों के मान ज्ञात हों तो शेष अवयवों के मान ज्ञात किये जा सकते हैं। समकोण गोलीय त्रिभुज के निर्धारण में समकोण के अतिरिक्त केवल दो और अवयव ज्ञात होना आवश्यक हैं। अध्याय 4 के सूत्रों में यदि एक कोण (मान लो कोण C) का मान 90° रख दें तो हमें समकोण गोलीय त्रिभुज से सम्बन्धित सब सूत्र प्राप्त हो सकते हैं। इन सूत्रों को स्वतन्त्र रूप से और भी सरलतापूर्वक स्थापित किया जा सकता है। वास्तव में, इस अध्याय में,, हमारा उद्देश्य उन नियमों पर विशेष प्रकाश डालना है जिनकी सहायता से समकोण त्रिभुज से सम्बन्धित सब सूत्र सरलतापूर्वक व्युत्पन्न किये और स्मरण रखे जा सकते हैं तथा उन्हें पाने के लिए हमें पिछले अध्याय पर निर्भर नहीं रहना पड़ता।

5·2. समकोण गोलीय त्रिभुज $ABC, C=90°$ के अवयवों से सम्बन्धित दस मूल सूत्र—

1. $\sin a = \tan b \cot B$
2. $\sin b = \tan a \cot A$
3. $\cos A = \tan b \cot c$
4. $\cos c = \cot A \cot B$
5. $\cos B = \tan a \cot c$
6. $\sin a = \sin c \sin A$

7. $\sin b = \sin a \sin B$

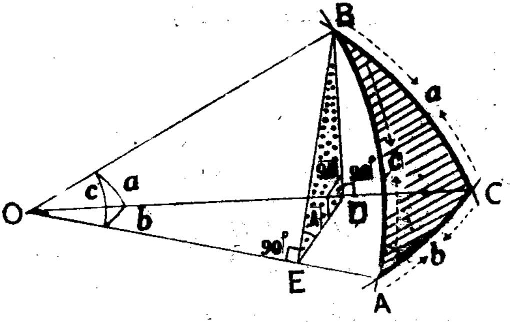
8. $\cos A = \cos a \sin B$

9. $\cos c = \cos a \cos b$

10. $\cos B = \cos b \sin A$

व्युत्पत्ति

मान लो बिन्दु O उस गोले का केन्द्र है जिस पर समकोण त्रिभुज ABC, $C = 90°$ स्थित है। मान लो भुजा a और b दोनों एक चतुर्थांश से कम हैं।



आकृति 57

शीर्ष A, B और C को केन्द्र O से मिलाया जिससे त्रितल कोण ($O-ABC$) की रचना हुई। अब बिन्दु B से OA के लम्ब रूप एक समतल BED खींचो जो OA और OC को क्रमशः E और D बिन्दुओं पर काटता है।

चूंकि OE समतल BDE के लम्ब रूप है

$\therefore$ $$OE \perp ED$$

और $$OE \perp EB$$

अतः समतल त्रिभुज BEO और DEO समकोण त्रिभुज हैं। . . . (i)

$\angle BED$, द्वितल कोण $B\text{-}OA\text{-}C$ का माप है। अतः

$$\angle BED = \angle A \qquad . . . (ii)$$

अब चूंकि,

समतल BDE, OE पर लम्ब है

∴ समतल BDE समतल OAC पर लम्ब रूप है। ∵ समतल OAC, OE में से जाता है।

और, समतल OBC और OAC परस्पर लम्ब रूप हैं। ∵ $\angle C = 90^\circ$

∴ समतल OBC और BDE (जो दोनों, समतल OAC पर लम्ब हैं) की प्रतिच्छेद रेखा BD, समतल OAC पर लम्ब है।

अतः त्रिभुज BDO और BDE समकोण त्रिभुज हैं

जिनमें,

$$\left.\begin{array}{ll} & \angle BDO = 90^\circ \\ \text{और,} & \angle BDE = 90^\circ \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \quad \text{(iii)}$$

और,

परिणाम (i), (ii) और (iii) से,

समकोण त्रिभुज BDO, BDE और BEO में,

$$\sin a = \frac{DB}{OB} = \frac{DB}{EB} \cdot \frac{EB}{OB} = \sin A \, . \sin c \quad . \; . \; . \quad (6)$$

समकोण त्रिभुज BDO, BDE और DEO में,

$$\tan a = \frac{DB}{OD} = \frac{DB}{ED} \cdot \frac{ED}{OD} = \tan A \, . \sin b \quad . \; . \; . \quad (2)$$

समकोण त्रिभुज BEO, DEO और BDO में,

$$\cos c = \frac{OE}{OB} = \frac{OE}{OD} \cdot \frac{OD}{OB} = \cos b \cos a \quad . \; . \; . \quad (9)$$

और, समकोण त्रिभुज DEO, BDO और BEO में,

$$\tan b = \frac{ED}{OE} = \frac{ED}{EB} \cdot \frac{EB}{OE} = \cos A \tan c \quad . \; . \; . \quad (3)$$

अब बिन्दु A से OB के लम्बरूप एक समतल की कल्पना करो। समान विश्लेषण से हमें चार और सूत्र प्राप्त होंगे जो उपरोक्त चार सूत्रों में a, b तथा A, B को परस्पर बदलने से भी प्राप्त किये जा सकते हैं। अतः (6), (2) और (3) से क्रमशः (7), (1) और (5) सूत्र प्राप्त किये जा सकते हैं। उपयुक्त परिवर्तन द्वारा सूत्र (9) से कोई नया सूत्र प्राप्त नहीं होता। परन्तु

सूत्र (1) और (2) का गुणा करने से,

$$\tan a \tan b = \tan A \tan B \sin a \sin b$$

या, $$\frac{\sin a}{\cos a} \cdot \frac{\sin b}{\cos b} = \tan A \tan B \sin a \sin b$$

या, $$\frac{1}{\cos a \cos b} = \tan A \tan B$$

परन्तु सूत्र (9) से,

$$\cos c = \cos a \cos b$$

$$\therefore \quad \cos c = \cot A \cot B \quad . \; . \; . \; . \quad (4)$$

इसी प्रकार, सूत्र (3) और (7) का गुणा करने से,

$$\sin b \cos A \tan c = \tan b \sin B \sin c$$

$$\because \quad \cos A = \frac{\tan b \sin B \sin c}{\sin b \tan c}$$

$$= \frac{\sin B \cos c}{\cos b}$$

$$= \frac{\sin B (\cos a \cos b)}{\cos b} \quad \because \text{ सूत्र } (9)$$

$$= \sin B \cos a \quad . \; . \; . \; . \quad (8)$$

अंत में, सूत्र (5) और (6) का गुणा करने से, हम सिद्ध कर सकते हैं कि,

$$\cos B = \sin A \cos b \quad . \; . \; . \; . \quad (10)$$

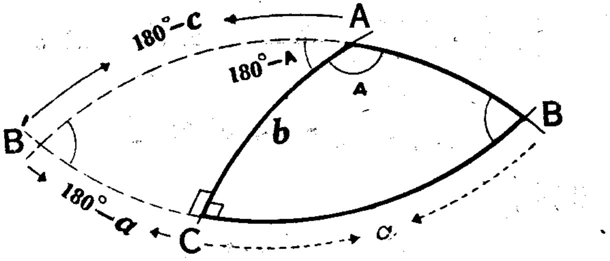
5·2.1. पिछली धारा के विश्लेषण में a और b प्रतिबन्धित हैं और इसलिए उपर्युक्त सूत्रों की व्यापकता स्थापित करने के लिए यह सिद्ध करना आवश्यक है कि प्रतिबन्ध हटाने पर भी सूत्रों की सत्यता यथावत रहती है। उपर्युक्त प्रतिबन्धों को हम दो भागों में विभाजित कर सकते हैं।

(अ) a और b में से कोई एक 90° से अधिक है। मान लो $a > 90°$ और $b < 90°$।

आकृति में BA और BC को बढ़ाया जो बिन्दु B' पर मिलती हैं। त्रिभुज $AB'C$ में,

$$AC = b < 90^\circ \quad \because \text{ कल्पना से ।}$$

और, $$B'C = 180^\circ - a < 90^\circ \quad \because \quad a > 90^\circ, \text{ कल्पना से ।}$$



आकृति 58

अतः त्रिभुज $AB'C$, $C = 90^\circ$ में समकोण बनाने वाली भुजाएँ 90° से कम हैं और इसलिए धारा (5·2) के सूत्र इस त्रिभुज के लिए सत्य हैं । सूत्र (6) से,

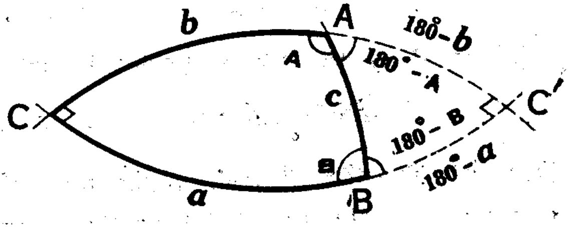
$$\sin(180^\circ - a) = \sin(180^\circ - A)\sin(180^\circ - c)$$

या, $$\sin a \;= \sin A \sin c$$

अतः सूत्र (6) इस स्थिति में भी सत्य है । इसी प्रकार दूसरे सूत्रों की सत्यता भी स्थापित की जा सकती है ।

(ब) a और b दोनों 90° से अधिक हैं । मान लो

$$a > 90^\circ \quad \text{और} \quad b > 90^\circ$$



आकृति 59

आकृति में, CA और CB को बढ़ाने पर वे C' बिन्दु पर मिलती हैं । अतः $\angle C = \angle C' = 90^\circ$, क्योंकि ये एक ही इन्दुक के कोण हैं । त्रिभुज ABC' में,

$$AC' = (180^\circ - b) < 90^\circ \quad \because \quad b > 90^\circ, \text{ कल्पना से ।}$$

और $$BC' = (180^\circ - a) < 90^\circ \quad \because \quad a > 90^\circ, \text{ कल्पना से ।}$$

त्रिभुज ABC', $C'=90°$ में समकोण बनाने वाली भुजाएँ 90° से कम हैं और इसलिए धारा (5·2) के सूत्र इस त्रिभुज के लिए सत्य हैं। सूत्र (6) से,

$$\sin(180°-a)=\sin(180°-A)\sin c$$

या,

$$\sin a=\sin A\sin c$$

अतः सूत्र (6) इस स्थिति में भी सत्य प्रमाणित होता है। इसी प्रकार शेष सूत्रों की सत्यता भी स्थापित की जा सकती है।

(अ) और (ब) से हम कह सकते हैं कि गोलीय समकोण त्रिभुज के मूल सूत्र व्यापक रूप में सत्य हैं।

5·2.2. धारा (5·2) के दस सूत्र, एक समकोण गोलीय त्रिभुज के (समकोण को छोड़कर) पाँच अवयवों में से एक बार तीन अवयवों में सम्बन्ध स्थापित करते हैं। बीजगणित से हम जानते हैं कि पाँच अवयवों में से, एक बार में, तीन का संचय (combination) कुल दस प्रकार से हो सकता है। अतः यदि कोई भी दो अवयव हमें ज्ञात हों तो इन्हें किसी तीसरे अवयव (अज्ञात अवयव जिसे ज्ञात करना है) के साथ जोड़ने वाला सम्बन्ध इन दस में से ही एक होगा।

5·3. चतुर्थांश नियम (Laws of Quadrants)

समकोण गोलीय त्रिभुज की भुजाओं और कोणों के बीच कुछ ज्यामितीय सम्बन्ध सदैव सत्य रहते हैं। इन सम्बन्धों को निम्नलिखित दो चतुर्थांश नियमों द्वारा दर्शा सकते हैं।

प्रथम चतुर्थांश नियम

समकोण गोलीय त्रिभुज ABC, $C=90°$ में भुजा और कोण A (तथा b और B) एक ही चतुर्थांश में होते हैं। अर्थात यदि $\angle A<90°$ तो a भी एक चतुर्थांश से कम होगा और यदि $\angle A>90°$ तो a भी एक चतुर्थांश से अधिक होगा।

द्वितीय चतुर्थांश नियम

समकोण गोलीय त्रिभुज ABC, $C=90°$ में यदि $c<90°$ तो भुजाएँ a और b (तथा कोण A और B) एक ही चतुर्थांश में होते हैं। परन्तु यदि $c>90°$ तो भुजाएँ a और b (तथा कोण A और B) विभिन्न चतुर्थांशों में होती हैं। दूसरे शब्दों में, त्रिभुज ABC, $C=90°$ में या यो तीनों भुजाएँ एक

चतुर्थांश से छोटी होती हैं अथवा एक भुजा चतुर्थांश से छोटी और दो भुजाएँ चतुर्थांश से बड़ी होती हैं।

उदाहरण 1 (अ)—मान लो $\angle A < 90^\circ$ और $c < 90^\circ$ हैं तो ज्ञात करो कि a, b और B किस चतुर्थांश में स्थित होंगे। और यदि $c > 90^\circ$ हो तो भी a, b और B का चतुर्थांश ज्ञात करो।

$A < 90^\circ$

$a < 90^\circ$ (i) $\because$ प्रथम चतुर्थांश नियम

अब, $c < 90^\circ$ $\because$ कल्पना से।

$\therefore$ a और b एक ही चतुर्थांश में होंगे $\because$ द्वितीय चतुर्थांश नियम

परन्तु $a < 90^\circ$ $\because$ (i)

$\therefore$ $b < 90^\circ$

द्वितीय चतुर्थांश नियम से A और B भी एक ही चतुर्थांश में होंगे और चूँकि $A < 90^\circ$ इसलिए B भी 90° से छोटा होगा।

अतः a, b और B; तीनों 90° से कम, अर्थात प्रथम चतुर्थांश में हैं। अब मान लो, $c > 90^\circ$ है तो द्वितीय नियम से, a और b विभिन्न चतुर्थांश में होंगे।

परन्तु $a < 90^\circ$ $\because$ $A < 90^\circ$, और प्रथम नियम

$\therefore$ $b > 90^\circ$

इसी प्रकार, A और B भी विभिन्न चतुर्थांश में होंगे, और चूँकि $A < 90^\circ$ इसलिए $B > 90^\circ$ होगा।

अतः $a < 90^\circ,\ b > 90^\circ, B > 90^\circ$

(ब) मान लो, $A > 60^\circ$ और $c < 90^\circ$ है तो,

$a > 90^\circ$ $\because$ प्रथम नियम

$\therefore$ $b > 90^\circ$ $\because$ द्वितीय नियम

और, $B > 90^\circ$ $\because$ द्वितीय नियम

परन्तु यदि, $A > 90^\circ$ और $c > 90^\circ$ है तो प्रथम नियम से $a > 90^\circ$ और द्वितीय नियम से $b < 90^\circ$ तथा द्वितीय नियम से ही $B < 90^\circ$।

5·3.1. चतुर्थांश नियमों का उपयोग, समकोण गोलीय त्रिभुजों के निर्धारण में अत्यन्त महत्वपूर्ण सिद्ध होता है। मान लो एक समकोण गोलीय त्रिभुज ABC में अवयव A और c ज्ञात हैं तो a का मान ज्ञात करने के लिए हम सूत्र (6),

$$\sin a = \sin A \sin c$$

का उपयोग कर सकते हैं। परन्तु सूत्र में c और A के मान स्थापित करने पर, a के मान की गणना हमें उसके साइन फलन से करना है, अतः a के दो मान प्राप्त होंगे। इस प्रकार की संदिग्ध स्थितियों का निराकरण करके उपयुक्त मान चुनने में चतुर्थांश नियम सहायक होते हैं। जैसे उपर्युक्त प्रश्न में, प्रथम चतुर्थांश नियम से, a का वह मान चुनना उपयुक्त है जो A के चतुर्थांश में हो। अर्थात यदि $A < 90°$ दिया हो तो a का भी $90°$ से कम वाला मान ही चुनना होगा।

5·3.2. चतुर्थांश नियमों की व्युत्पत्ति

प्रथम चतुर्थांश नियम

धारा (5·2) के सूत्र (8) से,

$$\sin B = \frac{\cos A}{\cos a}$$

अब चूँकि, $B < 180°$

$\therefore$ $\sin B > 0$

$\therefore$ या तो, $\cos A$ और $\cos a$ दोनों धनात्मक हैं अथवा दोनों ऋणात्मक।

अर्थात, या तो, A और a दोनों $90°$ से कम हैं अथवा, A और a दोनों $90°$ से अधिक हैं।

अतः a और A, एक ही चतुर्थांश में स्थित हैं। इसी प्रकार, सूत्र (10) से हम सिद्ध कर सकते हैं कि b और B, एक ही चतुर्थांश में स्थित हैं।

द्वितीय चतुर्थांश नियम। धारा (5·2) के सूत्र (9) से,

$$\cos c = \cos a \cos b$$

मान लो, $c < 90°$

$\therefore$ $\cos c > 0$

अतः $\cos a$ और $\cos b$, दोनों समान चिन्ह वाले होंगे।

अर्थात या तो,

a और b दोनों 90° से कम हैं अथवा, दोनों 90° से अधिक हैं।

परन्तु यदि, $$c > 90^\circ$$

तो, $$\cos c < 0$$

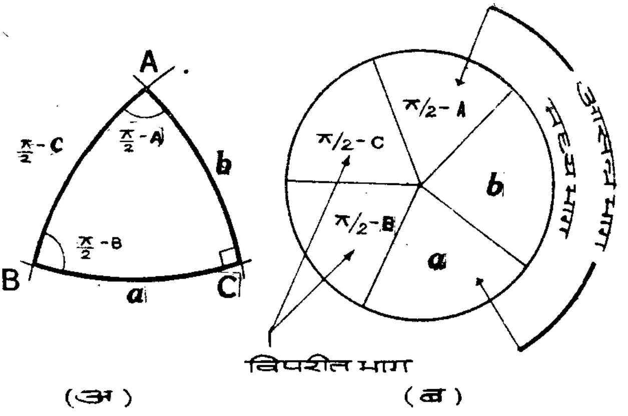
अतः $\cos a$ और $\cos b$ विभिन्न चिन्हों वाले हैं। अर्थात यदि $a < 90^\circ$ तो $b > 90^\circ$ और यदि $a > 90^\circ$ तो $b < 90^\circ$।

इसी प्रकार, सूत्र (8) से यह स्थापित कर सकते हैं कि यदि $c > 90^\circ$ तो $\angle A$ और $\angle B$ विभिन्न चतुर्थांशों में स्थित होंगे।

5·4. नैपियर वृत्तीय अवयव नियम—(Napier's Rule of Circular Parts)

गणितज्ञ नैपियर ने सन् 1614 में दो नियम प्रतिपादित किये जिनकी सहायता से धारा (5·2) के दसों सूत्र सरलता से लिखे जा सकते हैं। इन नियमों को इनके शोधकर्त्ता के नाम पर **"नैपियर वृत्तीय अवयव नियम"** कहते हैं।

समकोण गोलीय त्रिभुज ABC, $C = 90^\circ$ में समकोण को छोड़कर, समकोण बनाने वाली भुजाएँ (a, b), कर्ण का अनुपूरक $(\pi/2 - c)$ और शेष कोणों के अनुपूरक $\{(\pi/2 - A)$ और $(\pi/2 - B)\}$, त्रिभुज के पाँच वृत्तीय अवयव कहलाते हैं। इन वृत्तीय अवयवों को एक वृत्तीय व्यवस्था चित्र (Schematic Diagram) में, उपरोक्त प्रकार से दर्शा सकते हैं।



(अ) (ब)

आकृति 60

आकृति (अ), गोलीय समकोण त्रिभुज ABC के वृत्तीय अवयव दर्शाती है और आकृति (ब) में इन पाँच मूल अवयवों को आकृति (अ) के ही क्रम में, एक व्यवस्था चित्र के रूप में दर्शाया गया है।

इन अवयवों में से यदि किसी एक को मध्य भाग (Middle parts) नाम दे दें तो इस मध्य भाग से लगे हुए दो अवयवों को आसन्न भाग (Adjacent parts) तथा शेष दो अवयवों को विपरीत भाग (Opposite parts) कहते हैं। जैसे, यदि

मध्य भाग $= b$

तो आसन्न भाग $= a$ और $(\pi/2-A)$

और, विपरीत भाग $=(\pi/2-B)$ और $(\pi/2-c)$

उपर्युक्त पारिभाषिक शब्दों के पदों में, नैपियर नियमों को हम निम्न शब्दों में प्रतिपादित कर सकते हैं।

नैपियर वृत्तीय अवयव नियम

1. मध्य भाग का साइन = आसन्न भागों के टैन्जेन्ट्स का गुणनफल

   [sin (Middle part) = Product of Tangents of Adjacent parts.]

2. मध्य भाग का साइन = विपरीत भागों के कोसाइनों का गुणनफल

   [sin (Middle part) = Product of cosines of Opposite parts.]

5·4.1. पृष्ठ 164 पर दी गई सारिणी यह प्रमाणित करती है कि नैपियर नियमों से धारा (5·2) के दसों सूत्र प्राप्त होते हैं।

5·5. विविध उदाहरण

उदाहरण 1. समकोण गोलीय त्रिभुज ABC, $C=90°$ में सिद्ध करो कि

(अ) $\sin^2 a+\sin^2 b-\sin^2 c=\sin^2 a \sin^2 b$ [सागर, '66; विक्रम, '63]

(ब) $\sin a \tan \dfrac{A}{2}-\sin b \tan \dfrac{B}{2}=\sin(a-b)$ [सागर, '59]

(स) $\dfrac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)}=\tan\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\tan\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$ [रीवाँ, '70]

सूत्र-सारणी—1

नैपियर नियम और धारा (2·5) के सूत्र

मध्य भाग	नैपियर नियम 1	धारा (5·2) का सूत्र	सूत्र क्रमांक
a	$\sin a=\tan\left(\frac{\pi}{2}-B\right)\tan b$	$\sin a=\tan b\cot B$	1.
b	$\sin b=\tan a\tan\left(\frac{\pi}{2}-A\right)$	$\sin b=\tan a\cot A$	2.
$\frac{1}{2}\pi-A$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\tan b\tan\left(\frac{\pi}{2}-c\right)$	$\cos A=\tan b\cot c$	3.
$\frac{1}{2}\pi-c$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-c\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\tan\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$	$\cos c=\cot A\cot B$	4.
$\frac{1}{2}\pi-B$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\tan a\tan\left(\frac{\pi}{2}-c\right)$	$\cos B=\tan a\cot c$	5.
	नैपियर नियम—2		
a	$\sin a=\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-c\right)$	$\sin a=\sin A\sin c$	6.
b	$\sin b=\cos\left(\frac{\pi}{2}-c\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$	$\sin b=\sin c\sin B$	7.
$\frac{1}{2}\pi-A$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\cos a\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$	$\cos A=\cos a\sin B$	8.
$\frac{1}{2}\pi-c$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-c\right)=\cos a\cos b$	$\cos c=\cos a\cos b$	9.
$\frac{1}{2}\pi-B$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\cos b\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)$	$\cos B=\cos b\sin A$	10.

क्रिया—

(अ) $\sin^2 a+\sin^2 b-\sin^2 c=\sin^2 a \sin^2 b$

वाम पक्ष $=\sin^2 a+\sin^2 b-(1-\cos^2 c)$

$=\sin^2 a+\sin^2 b-(1-\cos^2 a \cos^2 b)$ ∵ सूत्र (9)

$=\sin^2 a+\sin^2 b-1+(1-\sin^2 a)(1-\sin^2 b)$

$=\sin^2 a \sin^2 b$

(ब) $$\sin a \tan\frac{A}{2}-\sin b \tan\frac{B}{2}=\sin(a-b)$$

दाहिना पक्ष $=\sin a \cos b-\cos a \sin b$

अब, $\sin a=\tan b \cot B$ ∵ सूत्र (1)

$\sin b=\tan a \cot A$ ∵ सूत्र (2)

$\sin(a-b)=\sin b \cot B-\sin a \cot A$

$$=\frac{\sin b}{\sin B}\left((1-2\sin^2\frac{B}{2}\right)-\frac{\sin a}{\sin A}\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)$$

$$=\frac{-2\sin b\sin^2\frac{B}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}+\frac{2\sin a\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\sin a \tan\frac{A}{2}-\sin b \tan\frac{B}{2}$$

(स) $$\frac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)}=\tan\frac{A+B}{2}\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

दाहिना पक्ष $$=\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}$$

$$=\frac{\cos B-\cos A}{\cos B+\cos A}$$

$$=\frac{\tan a \cot c-\tan b \cot c}{\tan a \cot c+\tan b \cot c}$$

$\because$ सूत्र (3) और (5)

$$=\frac{\tan a-\tan b}{\tan a+\tan b}$$

$$=\frac{\sin (a-b)}{\sin (a+b)}$$

टिप्पणी—इस प्रश्न को, नैपियर साहृश्यताओं में $C=\pi/2$ रखकर भी सरलतापूर्वक हल कर सकते हैं।

उदाहरण 2. समकोण गोलीय त्रिभुज ABC, $C=90°$ में शीर्ष C से कर्ण AB के लम्ब रूप खींचे गये दीर्घवृत्त चाप CD की लम्बाई δ है। सिद्ध करो कि,

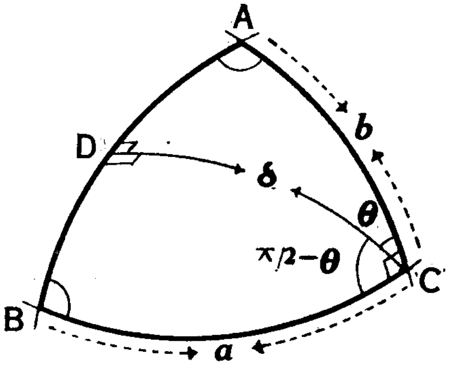
(अ) $\cot^2 \delta=\cot^2 a+\cot^2 b$

[सागर '66, जबलपुर '70, जिवाजी '70]

(ब) $\cos^2 \delta=\cos^2 A+\cos^2 B$

(स) $\sin^2 \delta=\tan AD. \tan BD$

(अ)—



आकृति 61

दिया है $CD \perp AB$

और, $CD=\delta$

मान लो, $ACD=\theta$

$$BCD=(\pi/2-\theta)$$

अब समकोण गोलीय त्रिभुज ADC, $D=90°$ में $(\pi/2-\theta)$ को मध्य भाग मानकर, नैपियर प्रथम नियम से,

$$\sin(\pi/2-\theta)=\tan\delta\tan(\pi/2-b)$$

या, $$\cos\theta=\tan\delta\cot b \qquad \ldots \quad \text{(i)}$$

इसी प्रकार त्रिभुज BCD, $D=90°$ में $\{\pi/2-(\pi/2-\theta)\}$ को मध्य भाग मानकर, नैपियर प्रथम नियम से,

$$\sin\{\pi/2-(\pi/2-\theta)\}=\tan\delta\tan(\pi/2-a)$$

या, $$\sin\theta=\tan\delta\cot a \qquad \ldots \quad \text{(ii)}$$

(i) और (ii) का वर्ग करके जोड़ने पर;

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=\tan^2\delta(\cot^2 b+\cot^2 a)$$

$$\therefore \qquad \cot^2\delta=\cot^2 a+\cot^2 b$$

(ब) त्रिभुज ADC, $D=90°$ और त्रिभुज BDC, $D=90°$ में क्रमशः $(\pi/2-A)$ और $(\pi/2-B)$ को मध्य भाग मानकर नैपियर द्वितीय नियम से,

$$\sin(\pi/2-A)=\cos\delta\cos(\pi/2-\theta)$$

या, $$\cos A=\cos\delta\sin\theta \qquad \ldots \quad \text{(iii)}$$

और, $$\sin(\pi/2-B)=\cos\delta\cos\{\pi/2-(\pi/2-\theta)\}$$

या, $$\cos B=\cos\delta\cos\theta \qquad \ldots \quad \text{(iv)}$$

(iii) और (iv) से,

$$\cos^2 A+\cos^2 B=\cos^2\delta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$$

$$\therefore \qquad \cos^2,\delta=\cos^2 A+\cos^2 B$$

(स) समकोण गोलीय त्रिभुज ADC और BDC में $CD=\delta$ को मध्य भाग मानकर नैपियर प्रथम नियम से;

$$\sin\delta=\tan AD.\tan(\pi/2-\theta)$$
$$=\tan AD.\cot\theta$$

और,

$$\sin \delta = \tan BD \tan \{\pi/2-(\pi/2-\theta)\}$$
$$= \tan BD \tan \theta$$

गुणा करने पर,

$$\therefore \qquad \sin^2 \delta = \tan AD \tan BD$$

उदाहरण 3. समकोण गोलीय त्रिभुज $ABC, C=90°$ के शीर्ष बिन्दु C से कर्ण AB पर क्रमशः लम्बरूप और उसे समद्विभाजित करने वाले दो दीर्घवृत्त चापों की लम्बाइयाँ क्रमशः α और β हैं।

सिद्ध करो कि

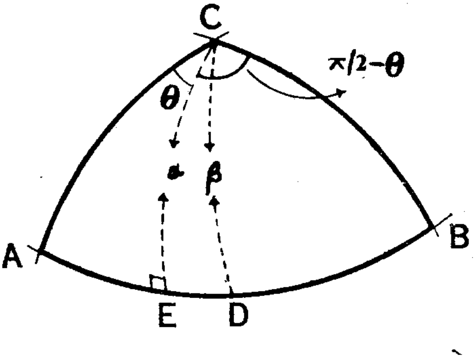
(अ) $$4 \cos^2 \frac{c}{2} \sin^2 \beta = \sin^2 a + \sin^2 b$$

[सागर, 1965; जिवाजी, 1964]

(ब) $$\sin^2 \tfrac{1}{2}c\,(1+\sin^2 \beta) = \sin^2 \beta$$

[इन्दौर, '66; जिवाजी, '68; रीवाँ, '69; जबलपुर, '70]

$$\cot^2 \beta = \frac{(\cos a+\cos b)^2}{\sin^2 a+\sin^2 b}$$



आकृति 62

(अ) त्रिभुज ACD और BCD में क्रमशः कोसाइन सूत्र से,

$$\cos AC = \cos AD \cos \beta + \sin AD \sin \beta \cos D$$

या, $$\cos b = \cos AD \cos \beta + \sin AD \sin \beta \cos D \qquad (i)$$

और, $\cos BC = \cos BD \cos\beta + \sin BD \sin\beta \cos(\pi - D)$

या, $\cos a = \cos AD \cos\beta - \sin AD \sin\beta \cos D$ (ii)

$\because \quad BD = AD$

(i) और (ii) को जोड़ने पर,

$$\cos a + \cos b = 2 \cos AD \cos\beta$$

$$= 2 \cos \tfrac{1}{2}c \cos\beta \quad \because \; AD = BD = \tfrac{1}{2}C$$

परन्तु, $\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta$

$$= 1 - \frac{(\cos a + \cos b)^2}{4 \cos^2 \frac{1}{2}c}$$

$$\therefore \; 4 \cos^2 \tfrac{1}{2}c \sin^2\beta = 4 \cos^2 \tfrac{1}{2}c - (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos a \cos b)$$

$$= 2(1 + \cos c) - \cos^2 a - \cos^2 b - 2 \cos c$$

$\because$ सूत्र (9)

$$= 2 - \cos^2 a - \cos^2 b$$

$$= \sin^2 a + \sin^2 b$$

(ब) [आकृति (62) में देखो]

दिया है,

$$CE \perp AB$$

और, $CE = \alpha$

CD मध्यगत रेखा है।

और, $CD = \beta$

मान लो, $\angle ACE = \theta$

$\therefore$ $\angle BCE = \pi/2 - \theta \qquad \because \; C = \pi/2$

त्रिभुज AEC, $E = 90°$ में $(\pi/2 - A)$ को मध्य भाग मानकर नैपियर द्वितीय नियम से,

$$\sin(\pi/2 - A) = \cos\alpha \cos(\pi/2 - \theta)$$

या, $\cos A = \cos\alpha \sin\theta \quad . \; . \; . \; . \quad$ (i)

और त्रिभुज $BEC, E=90°$ में $(\pi/2-B)$ को मध्य भाग मानकर, नैपियर द्वितीय नियम से,

$$\sin(\pi/2-B)=\cos a\cos\{\pi/2-(\pi/2-\theta)\}$$

या,
$$\cos B=\cos a\cos\theta \quad . \; . \; . \quad \text{(ii)}$$

(i) और (ii) से,

$$\cos^2 A+\cos^2 B=\cos^2 a\,(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$
$$=\cos^2 a \quad . \; . \; . \quad \text{(iii)}$$

अब, त्रिभुज ACD और BCD में $\angle ACD$ और $\angle BCD$ अनुपूरक हैं। साइन सूत्र से,

$$\frac{\sin\beta}{\sin A}=\frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin ACD} \quad \because \quad AD=BD=\tfrac{1}{2}c$$

या,

$$\sin\beta\sin ACD=\sin\tfrac{1}{2}c\sin A$$

और,
$$\frac{\sin\beta}{\sin B}=\frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin BCD}$$

या,
$$\sin\beta\sin BCD=\sin\tfrac{1}{2}c\sin B$$

वर्ग करके जोड़ने पर,

$$\sin^2\beta\,(\sin^2 ACD+\sin^2 BCD)=\sin^2\tfrac{1}{2}c\,(\sin^2 A+\sin^2 B)$$

या,

$$\sin^2\beta\,(\sin^2 ACD+\cos^2 ACD)=\sin^2\tfrac{1}{2}c\,(\sin^2 A+\sin^2 B)$$

या,

$$\sin^2\beta=\sin^2\tfrac{1}{2}c\,(\sin^2 A+\sin^2 B) \quad . \; . \; . \quad \text{(iv)}$$

(iii) में $\sin^2\frac{1}{2}c$ का गुणा करके (iv) में जोड़ने से,

$$\sin^2\tfrac{1}{2}c\,(\cos^2 A+\cos^2 B+\sin^2 A+\sin^2 B)$$
$$=\sin^2\tfrac{1}{2}c\cos^2 a+\sin^2\beta$$

या,
$$\sin^2\tfrac{1}{2}c\,(2-\cos^2 a)=\sin^2\beta$$

या,
$$\sin^2\tfrac{1}{2}c\,(1+\sin^2 a)=\sin^2\beta$$

(स) खण्ड (अ) से,

$$2 \cos \tfrac{1}{2}c \cos \beta = \cos a + \cos b \quad . \; . \; . \quad \text{(i)}$$

और,

$$4 \cos^2 \tfrac{1}{2}c \sin^2 \beta = \sin^2 a + \sin^2 b \quad . \; . \; . \quad \text{(ii)}$$

(i) के वर्ग में (ii) का भाग देने से,

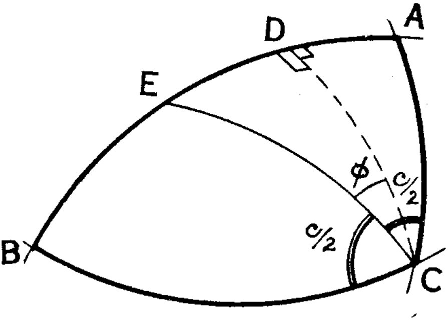
$$\frac{4 \cos^2 \frac{1}{2}c \cos^2\beta}{4 \cos^2 \frac{1}{2}c \sin^2\beta} = \frac{(\cos a + \cos b)^2}{\sin^2 a + \sin^2 b}$$

या

$$\cot^2 \beta = \frac{(\cos a + \cos b)^2}{\sin^2 a + \sin^2 b}$$

उदाहरण 4. गोलीय त्रिभुज *ABC* के शीर्ष बिन्दु *C* से दो दीर्घवृत्त चाप, क्रमशः *AB* पर लम्ब रूप और कोण *C* को समद्विभाजित करते हुए खींचे गये हैं। यदि इन चापों के बीच का कोण ϕ है तो सिद्ध करो कि,

$$\tan \phi = \frac{\cos \left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos (a+b)} \cdot \tan \left(\frac{A-B}{2}\right)$$ [रीवाँ, '70; सागर, '62]



आकृति 63

दिया है—त्रिभुज *ABC* में,

(i) *CE*, कोण *ABC* को समद्विभाजित करता है।

$$\therefore \qquad \angle ACE = \angle BCE = \frac{C}{2}$$

(ii) $CD \perp AB$

(iii) $\angle ECD = \phi$

त्रिभुज ADC, $D=90°$ और त्रिभुज BDC, $D=90°$ में क्रमशः $(\pi/2-A)$ और $(\pi/2-B)$ को मध्य भाग मानकर, नैपियर द्वितीय नियम से,

$$\sin(\pi/2-A)=\cos CD\cos(\pi/2-ACD)$$

या,
$$\cos A=\cos CD\sin(\tfrac{1}{2}C-\phi)\quad\because\ \angle ACD=\frac{C}{2}-\phi$$

और,
$$\sin(\pi/2-B)=\cos CD\cos\left(\frac{\pi}{2}-BCD\right)$$

या,
$$\cos B=\cos CD\sin(\tfrac{1}{2}C+\phi)\quad\because\ \angle BCD=\frac{C}{2}+\phi$$

$$\therefore\quad\frac{\cos B}{\cos A}=\frac{\sin(\frac{1}{2}C+\phi)}{\sin(\frac{1}{2}C-\phi)}$$

योगान्तरानुपात से,

$$\frac{\cos B-\cos A}{\cos B+\cos A}=\frac{\sin(\frac{1}{2}C+\phi)-\sin(\frac{1}{2}C-\phi)}{\sin(\frac{1}{2}C+\phi)+\sin(\frac{1}{2}C-\phi)}$$

या,
$$\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)=\frac{2\cos\frac{1}{2}C\sin\phi}{2\sin\frac{1}{2}C\cos\phi}$$
$$=\tan\phi\cot\tfrac{1}{2}C\quad\ldots\quad\text{(iii)}$$

त्रिभुज ABC में नैपियर साहृश्यता से,

$$\tan\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}C$$

(iii) $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)$ का मान रखने पर,

$$\frac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{a+b}{2}}\cot\tfrac{1}{2}C\,.\tan\frac{A-B}{2}=\tan\ \phi\,.\cot\tfrac{1}{2}C$$

$$\therefore\quad\tan\phi=\frac{\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)}\,.\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

उदाहरण 5. किसी गोले पर OX और OY दो परस्पर लम्ब रूप प्रतिच्छेदी दीर्घवृत्त हैं। OX और OY को काटने वाले तीसरे दीर्घवृत्त AB पर, P एक स्वेच्छ बिन्दु है। चाप $OC=P$, AB पर लम्ब है और OX से $\angle COX=\alpha$ बनाता है। चाप PM और PN क्रमशः OX और OY पर लम्ब हैं। यदि $OM=x$ और $ON=y$ है तो सिद्ध करो कि,

$$\cos\alpha\tan x+\sin\alpha\tan y=\tan p$$

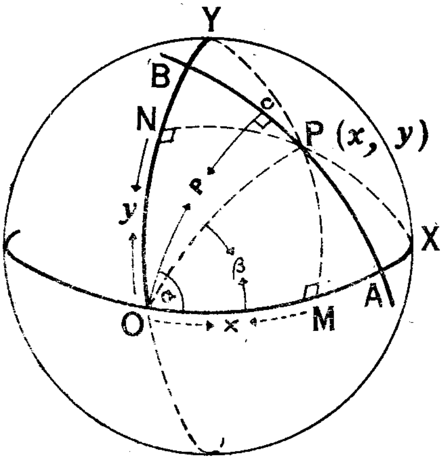
[विक्रम, 1965; सागर, 1966]

दिया है (i) $OX\perp OY$

(ii) $OC\perp AB$ और $OC=p$

(iii) $\angle COX=\alpha$

(iv) $OM=x,\ ON=y$



आकृति 64

मान लो, $\angle POM=\beta$

अतः समकोण त्रिभुज PMO, $M=90^\circ$ और त्रिभुज PNO, $N=90^\circ$ में,

$$\pi/2-POM=\pi/2-\beta$$

और, $$\pi/2-PON=\pi/2-(\pi/2-POM)$$

$$\because \quad \angle POM + \angle PON = \angle XOY = 90^\circ$$

$$= \angle POM = \beta \qquad . \ . \ . \ (1)$$

को क्रमशः मध्य भाग मानकर, नैपियर प्रथम नियम से,

$$\sin(\pi/2 - POM) = \tan OM \tan(\pi/2 - OP)$$

या, $\sin(\pi/2 - \beta) = \tan OM \tan(\pi/2 - OP) \qquad \because (1)$

या, $\cos\beta = \tan x \cot OP \quad . \ . \ . \ (2) \qquad \because (4)$

तथा, $\sin(\pi/2 - PON) = \tan ON \tan(\pi/2 - OP)$

या, $\sin\beta = \tan y \cot OP \qquad . \ . \ . \ (3)$

$\because$ (1) और (iv)

अब $(\cos\alpha \tan x + \sin\alpha \tan y)$ में (2) और (3) से $\tan x$ और $\tan y$ के मान स्थापित करने पर,

$$\cos\alpha \tan x + \sin\alpha \tan y$$

$$= \cos\alpha\left(\frac{\cos\beta}{\cot OP}\right) + \sin\alpha\left(\frac{\sin\beta}{\cot OP}\right)$$

$$= (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)\tan OP$$

$$= \cos(\alpha - \beta)\tan OP \qquad . \ . \ . \ (4)$$

और समकोण त्रिभुज PCO, $C = 90^\circ$ में, $(\pi/2 - COP)$ को मध्य भाग मानकर, नैपियर प्रथम नियम से,

$$\sin(\pi/2 - COP) = \tan OC \tan(\pi/2 - OP)$$

या, $\cos COP = \tan p \cot OP \qquad \because$ (ii)

या, $\cos(\alpha - \beta) = \tan p \cot OP \qquad . \ . \ . \ (5)$

(4) और (5) से,

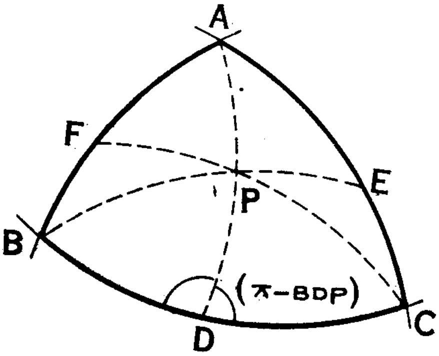
$$\cos\alpha \tan x + \sin\alpha \tan y = \cos(\alpha - \beta) \cdot \frac{\tan p}{\cos(\alpha - \beta)}$$

$$= \tan p.$$

5·6. गोलीय त्रिभुज के शीर्ष बिन्दुओं से खींचे गये चापों द्वारा भुजाओं के खण्ड

प्रमेय 14

गोलीय त्रिभुज में स्थित किसी बिन्दु से त्रिभुज के शीर्ष बिन्दुओं को मिलाने वाले चापों द्वारा उनकी सम्मुख भुजाओं पर अंतरित एकान्तर खण्डों के साइन फलनों का गुणनफल बराबर होता है।



आकृति 65

मान लो, P कोई स्वेच्छ बिन्दु है और चाप AP, BP और CP, शीर्षों की सम्मुख भुजाओं को क्रमशः D, E और F में मिलते हैं।

सिद्ध करना है—

$$\sin BD.\ \sin CE.\ \sin AF = \sin DC.\ \sin EA.\ \sin FB$$

उपपत्ति—

त्रिभुज PBD और PDC में, साइन सूत्र से,

$$\frac{\sin BD}{\sin BP}=\frac{\sin \angle BPD}{\sin \angle BDP}$$

और,

$$\frac{\sin BD}{\sin CP}=\frac{\sin \angle CPD}{\sin \angle CDP}=\frac{\sin \angle CPD}{\sin \angle(\pi-BDP)}=\frac{\sin \angle CPD}{\sin \angle BDP}$$

$$\therefore\ \frac{\sin BD}{\sin DC}=\frac{\sin \angle BPD}{\sin \angle BDP}\times\frac{\sin \angle BDP}{\sin \angle CPD}\times\frac{\sin BP}{\sin CP}$$

$$=\frac{\sin \angle BPD}{\sin \angle CPD}\times\frac{\sin BP}{\sin CP}$$

इसी प्रकार,

$$\frac{\sin CE}{\sin EA} \quad \text{और} \quad \frac{\sin AF}{\sin FB}$$

के मान प्राप्त किये जा सकते हैं। इन मानों में निम्नलिखित सम्मुख कोणों के जोड़ों का ध्यान रखकर, तीनों पदों का गुणा करने पर अभीष्ट परिणाम प्राप्त होता है।

आकृति से स्पष्ट है कि

$$\angle BPD = \text{सम्मुख कोण } APE$$

$$\angle CPD = \text{सम्मुख कोण } APF$$

और,

$$\angle CPE = \text{सम्मुख कोण } BPF$$

अतः

$$\frac{\sin BD}{\sin DC} \times \frac{\sin CE}{\sin EA} \times \frac{\sin AF}{\sin FB} = 1$$

या,

$$\sin BD.\sin CE.\sin AF = \sin DC.\sin EA.\sin FB$$

विलोम—यदि गोलीय त्रिभुज ABC की भुजाओं में D, E और F बिन्दु इस प्रकार स्थित हैं कि उपर्युक्त प्रमेय का परिणाम सत्य है, तो इन बिन्दुओं को क्रमशः संगत शीर्ष बिन्दुओं से मिलाने वाले चाप एक बिन्दुगामी होते हैं।

उपर्युक्त कथन से, निम्नलिखित महत्वपूर्ण परिणाम स्थापित किये जा सकते हैं।

1—गोलीय त्रिभुज के शीर्ष बिन्दुओं से सम्मुख भुजाओं पर डाले गये लम्ब एक बिन्दुगामी होते हैं।

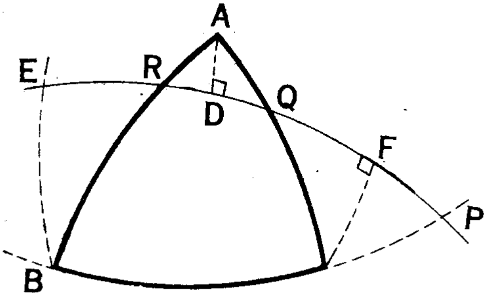
2—गोलीय त्रिभुज के शीर्ष कोणों के अर्धक एक बिन्दुगामी होते हैं।

3—गोलीय त्रिभुज के शीर्ष बिन्दुओं को उनकी सम्मुख भुजाओं के मध्य बिन्दुओं से मिलाने वाले चाप (अर्थात मध्यगत रेखाएँ) एक बिन्दुगामी होते हैं।

4—गोलीय त्रिभुज के शीर्ष बिन्दुओं और भुजाओं के उन बिन्दुओं से, जिनमें अंतर्गत वृत्त भुजाओं को स्पर्श करता है, खींचे गये चाप एक बिन्दुगामी होते हैं।

उदाहरण 6. यदि एक दीर्घवृत्त त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA और AB को क्रमशः P, Q और R बिन्दुओं में काटता है तो सिद्ध करो कि

$$\frac{\sin BP . \sin CQ . \sin AR}{\sin PC . \sin QA . \sin RB}=(-1)$$



आकृति 66

शीर्ष बिन्दुओं से, दीर्घवृत्त पर क्रमशः AD, BE और CF लम्ब खींचो।

अब, समकोण गोलीय त्रिभुज PEB, $E=90°$ में, नैपियर द्वितीय नियम से,

$$\sin BE=\sin BP . \sin \angle EPB \quad . \; . \; . \quad (1)$$

इसी प्रकार, $\triangle PFC$, $F=90°$ में,

$$\sin CF=\sin CP . \sin \angle EPB \quad . \; . \; . \quad (2)$$

(1) और (2) से,

$$\frac{\sin BP}{\sin CP}=\frac{\sin BE}{\sin CF}$$

इसी प्रकार हम स्थापित कर सकते हैं कि

$$\frac{\sin CQ}{\sin QA}=\frac{\sin CF}{\sin AD}$$

और,

$$\frac{\sin AR}{\sin AB}=\frac{\sin AD}{\sin BE}$$

गुणा करने से,

$$\frac{\sin BP . \sin CQ . \sin AR}{\sin CP . \sin QA . \sin RP} = \frac{\sin BE}{\sin CF} \times \frac{\sin CF}{\sin AD} \times \frac{\sin AD}{\sin BE} = 1$$

परन्तु $\sin CP = -\sin PC$, अतः अभीष्ट परिणाम प्राप्त होता है।

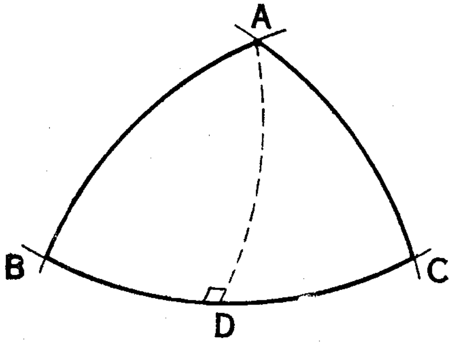
5·7. गोलीय त्रिभुज का शीर्ष लम्ब (Alittude of a Spherical Triangle)

परिभाषा

गोलीय त्रिभुज के किसी शीर्ष बिन्दु से, सम्मुख भुजा के लम्ब रूप खींचा गया चाप, त्रिभुज का शीर्ष लम्ब कहलाता है।

प्रमेय

गोलीय त्रिभुज के प्रत्येक शीर्ष लम्ब और उसकी संगत भुजा के साइन फलनों का गुणनफल एक अचर राशि होता है।



आकृति 67

मान लो, गोलीय त्रिभुज ABC में $\overline{AD}$ एक शीर्ष लम्ब है।

सिद्ध करना है—$\sin a \sin AD =$ अचर राशि।

उपपत्ति—समकोण गोलीय त्रिभुज ADC, $D = 90°$ में AD को मध्य भाग मानकर, नैपियर द्वितीय नियम से,

$$\sin AD = \cos (\pi/2 - AC) \cos (\pi/2 - C)$$
$$= \sin b \sin C \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

और त्रिभुज ABC में साइन सूत्र से,

$$\frac{\sin C}{\sin c}=\frac{2n}{\sin a \sin b \sin c} \quad \text{या, } \sin C=\frac{2n}{\sin a \sin b} \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$

(i) और (ii) से,

$$\sin a . \sin AD = \sin a . \sin b \times \frac{2n}{\sin a \sin b}$$

$$= 2n = \text{अचर राशि} \qquad \because \text{ धारा } (4 4)$$

इसी प्रकार, यदि BE और CF दूसरे शीर्ष लम्ब हैं तो हम सिद्ध कर सकते हैं कि,

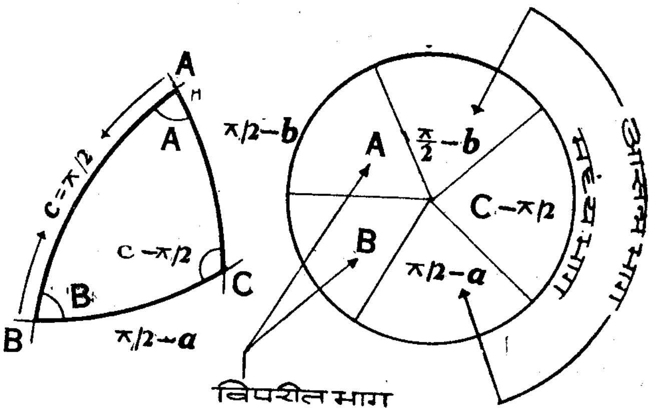
$$\sin b \ \sin BE = \sin c . \sin CF = 2n$$

5·8. चतुर्थांशी त्रिभुज (Quadrantal Triangle)

परिभाषा

जब गोलीय त्रिभुज की एक भुजा चतुर्थांश के बराबर होती है तब उसे चतुर्थांशी त्रिभुज कहते हैं।

चतुर्थांशी त्रिभुज का ध्रुवीय त्रिभुज एक समकोण त्रिभुज होगा जिसके अवयवों में नैपियर नियमों से सम्बन्ध स्थापित किये जा सकते हैं और उन्हें आधारी चतुर्थांशी त्रिभुज के अवयवों में परिवर्तित किया जा सकता है।



आकृति 68

मान लो, त्रिभुज ABC में $c=\pi/2$ है। आकृति में दर्शाये क्रम में, यदि

चतुर्थांशी त्रिभुज के निम्नलिखित पाँच वृत्तीय भाग मान लें तो नैपियर नियमों से ही चतुर्थांशी त्रिभुज के अवयवों के बीच सम्बन्ध स्थापित कर सकते हैं।

पाँच वृत्तीय भाग

$$A, B, (\pi/2-a), (C-\pi/2)$$

और $$(\pi/2-b).$$

उदाहरण—मान लो, $(C-\pi/2)$ को मध्य भाग माने तो $(\pi/2-a)$ और $(\pi/2-b)$ आसन्न भाग तथा A और B विपरीत भाग होंगे।

नैपियर प्रथम नियम से,

$$\sin(C-\pi/2)=\tan(\pi/2-a)\tan(\pi/2-b)$$

या, $$-\cos C=\cot a\cot b$$

या, $$\cos C+\cot a\cot b=0$$

और नैपियर द्वितीय नियम से,

$$\sin(C-\pi/2)=\cos A\cos B$$

या, $$\cos C+\cos A\cos B=0$$

इसी प्रकार, आठ और सम्बन्ध स्थापित किये जा सकते हैं।

प्रश्न संग्रह 8

समकोण गोलीय त्रिभुज $ABC, C=90°$ में निम्नलिखित सर्वसमिकाएँ सिद्ध करो।

1. $\sin(A-a)\sin(A+a)=\sin^2 A\cos^2 c$
2. $\sin(c-a)\sin(c+a)=\cos^2 A\sin^2 c$
$$=\sin^2 b\cos^2 a$$
3. $\sin(c-a)=\sin b\cos a\tan\frac{B}{2}$
$$=\tan b\cos c\tan\frac{B}{2}$$

4. $\cos^2 A+\cos^2 c=\cos^2 a+\cos^2 A\cos^2 c$

5. $\tan^2 \dfrac{A}{2}=\sin(c-b)\operatorname{cosec}(c+b)$

$\left[\text{संकेत}—\tan^2 \dfrac{A}{2}=\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}\right]$

6. $\tan \dfrac{A}{2} \sin a=\sin c-\cos a\cos b$

[जबलपुर, 1970]

7. $\tan^2 \dfrac{a}{2}=\tan\left(\dfrac{c+b}{2}\right)\tan\left(\dfrac{c-b}{2}\right)$

$\left[\text{संकेत}—\tan^2 \dfrac{a}{2}=\dfrac{1-\cos a}{1+\cos a} \text{ और सूत्र } (9)\right]$

8. $\tan^2 \dfrac{c}{2}=-\dfrac{\cos(A+B)}{\cos(A-B)}$

$\left[\text{संकेत}—\tan^2 \dfrac{c}{2}=\dfrac{1-\cos c}{1+\cos C} \text{ और सूत्र } (4)\right]$

9. $\cos^2(\pi/4+c/2)=\dfrac{\sin B-\sin b}{2\sin B}$

10. $2\sin^2 \tfrac{1}{2}c=\sin^2\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+\sin^2\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$

[जबलपुर, 1960]

11. $\sin(A+B)=\dfrac{\cos a+\cos b}{1+\cos a\cos b}$ [सागर, 1955]

[संकेत—सूत्र (8) और (10) से दाहिने पक्ष में मान रखो।]

12. $\sin s\sin(s-c)=\sin(s-b)\sin(s-a)$

13. समकोण गोलीय त्रिभुज ABC, $C=90°$ के शीर्ष C से कर्ण AB के लम्बरूप खींचे गये दीर्घवृत्त चाप CD की लम्बाई δ है। सिद्ध करो कि

(अ) $\cos\delta\sin c=(\cos^2 a+\cos^2 b-2\cos a\cos b\cos c)^{1/2}$

(ब) $\sin^2\delta\sin^2 c=\sin^2 a+\sin^2 b-\sin^2 c$

14. गोलीय त्रिभुज ABC के शीर्ष बिन्दुओं से सम्मुख भुजाओं पर डाले गये लम्ब उन्हें क्रमशः D, E और F बिन्दुओं पर मिलते हैं। सिद्ध करो कि

(अ) $\tan BD \tan CE \tan AF = \tan DC \tan EA \tan FB$ [जिवाजी, 1969]

(ब) $\sin BD \sin CE \sin AF = \sin DC \sin EA \sin FB$

(स) $\cos BD \cos CE \cos AF = \cos DC \cos EA \cos FB$

15. गोलीय त्रिभुज ABC के शीर्ष बिन्दुओं से, सम्मुख भुजाओं पर डाले गये लम्ब उन्हें क्रमशः D, E और F बिन्दुओं पर मिलते हैं। यदि लम्बों का प्रतिच्छेद बिन्दु O है तो सिद्ध करो कि

(i) $$\frac{\tan AD}{\tan OD} = 1 + \frac{\cos A}{\cos C \cos B}$$

(ii) $$\frac{\tan BE}{\tan OE} = 1 + \frac{\cos B}{\cos C \cos A}$$

(iii) $$\frac{\tan CF}{\tan OF} = 1 + \frac{\cos C}{\cos A \cos B}$$

16. बिन्दु E, गोलीय त्रिभुज ABC की भुजा BC का मध्य बिन्दु है और बिन्दु D शीर्ष A से भुजा BC पर खींचे गये लम्ब का लम्ब-पाद है। सिद्ध करो कि,

$$\tan ED \sin (B+C) = \tan \frac{a}{2} \sin (B-C)$$

या, $$\tan ED = \tan \left(\frac{b+c}{2}\right) \tan \left(\frac{b-c}{2}\right) \tan \frac{a}{2}$$

17. यदि गोलीय त्रिभुज ABC के शीर्ष कोण A के समद्विभाजक चाप और शीर्ष A से खींचे गये शीर्ष लम्ब के बीच का कोण θ है तो सिद्ध करो कि,

$$\tan \theta = \frac{\sin (b-c)}{\sin (b+c)} \cot \frac{A}{2}$$

$$= \tan \frac{B+C}{2} \tan \frac{B-C}{2} \tan \frac{A}{2}$$

18. समकोण गोलीय त्रिभुज ABC, $C=90°$ में यदि चाप CX और CY समकोण C के आन्तरिक और बाह्य समद्विभाजक हैं तो सिद्ध करो कि

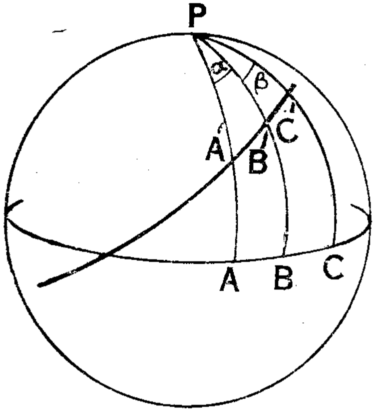
$$\cot^2 CX+\cot^2 CY=\cot^2 a+\cot^2 b$$

[विक्रम, 1963]

19. ABC गोले पर स्थित एक दीर्घवृत्त है। दीर्घवृत्त चाप AA', BB' और CC' वृत्त ABC पर, उसके एक ही ओर, लम्ब रूप खींचे गये हैं। सिद्ध करो कि बिन्दु A', B' और C' एक ही दीर्घवृत्त पर स्थित हैं यदि,

$$\tan AA' \sin BC+\tan BB' \sin CA+\tan CC' \sin AB=O$$

[सागर, 1959]



आकृति 69

दिया है कि, AA', BB' और CC' वृत्त ABC के द्वितीयक हैं।

इनका प्रतिच्छेद बिन्दु P, वृत्त ABC का ध्रुव है।

$$\therefore \qquad PA=PB=PC=\pi/2 \qquad . \quad . \quad . \quad (i)$$

आकृति में दर्शाये अनुसार, मान लो,

$\angle APB=\alpha, \angle BPC=\beta$ और $\angle APC=(\alpha+\beta)$

यदि $A'B'C'$ दीर्घवृत्त चाप है तो $PA'C'$ एक गोलीय त्रिभुज है

जिसकी भुजा $A'C'$ पर B' कोई बिन्दु है। त्रिभुज $PA'B'$ और $PB'C'$ में, कोटेन्जेन्ट सूत्र से,

$$\cos PB' \cos \alpha = \sin PB' \cot PA' - \sin \alpha \cot B' \qquad \text{(ii)}$$

और,
$$\cos PB' \cos \beta = \sin PB' \cot PC' - \sin \beta \cot (\pi - B')$$
$$= \sin PB' \cot PC' + \sin \beta \cot B' \quad . \quad . \quad . \quad \text{(iii)}$$

B' का विलोपन करने पर,

$$\cos PB' (\cos \alpha \sin \beta + \cos \beta \sin \alpha)$$
$$= \sin PB' (\sin \beta \cot PA' + \sin \alpha \cot PC')$$

या,

$$\cot (\pi/2 - BB') \sin (\alpha + \beta) = \sin \beta \cot (\pi/2 - AA')$$
$$+ \sin \alpha \cot (\pi/2 - CC')$$

या,

$$\tan BB' \sin (\alpha + \beta) = \sin \beta \tan AA'$$
$$+ \sin \alpha \tan CC' \quad . \quad . \quad . \quad \text{(vi)}$$

अब समकोण गोलीय त्रिभुज PAB, $B = 90°$ में,

$$\sin \alpha = \sin AB$$

इसी प्रकार,
$$\sin \beta = \sin BC$$

और,
$$\sin (\alpha + \beta) = \sin AC$$
$$= -\sin CA$$

(iv) में मान रखने पर,

$$\tan AA' \sin BC + \tan BB' \sin CA$$
$$+ \tan CC' \sin AB = 0$$

20. यदि गोले पर स्थित दो परस्पर लम्ब रूप प्रतिच्छेदी दीर्घवृत्त, गोले पर स्थित किसी बिन्दु को निर्देशित करने के लिये निर्देशांक अक्ष हैं तो बिन्दु से अक्षों पर खींचे लम्ब रूप चापों द्वारा अक्षों पर अंतरित अंतःखंड (x, y) बिन्दु के निर्देशांक दर्शाते हैं। सिद्ध करो कि बिन्दु से होकर जाने वाले दीर्घवृत्त का, जो अक्षों को क्रमशः A और B बिन्दुओं में काटता है, समीकरण निम्नलिखित होगा—

$$\tan x \cot OA + \tan y \cot OB = 1$$

[**संकेत**—उदाहरण 5 से,

$$\cos \alpha \tan x + \sin \alpha \tan y = \tan p \quad . \ . \ \text{(i)}$$

समकोण त्रिभुज OCA, $C = 90°$ में $(\pi/2 - \alpha)$ को मध्य भाग मानकर नैपियर प्रथम नियम से,

$$\sin(\pi/2 - \alpha) = \tan p \tan(\pi/2 - OA)$$

या, $$\cos \alpha = \tan p \cot OA \quad . \ . \ . \ \text{(ii)}$$

इसी प्रकार, त्रिभुज OCB से,

$$\sin \alpha = \tan p \cot OB \quad . \ . \ . \ \text{(iii)}$$

(ii) और (iii) से (i) में मान रखकर सरल करने से अभीष्ट परिणाम प्राप्त किया जा सकता है।]

21. गोले पर स्थित दो परस्पर लम्बरूप प्रतिच्छेदी दीर्घवृत्त, गोले पर स्थित किसी बिन्दु को निर्देशित करने के लिए निर्देशांक अक्ष हैं। बिन्दु से खींचे लम्ब रूप चापों द्वारा अक्षों पर आन्तरित अंतःखंड (x, y), बिन्दु के निर्देशांक दर्शाते हैं। सिद्ध करो कि यदि बिन्दु (θ, ϕ); (θ', ϕ') और (θ'', ϕ'') एक ही दीर्घवृत्त पर स्थित हैं तो

$$\tan \phi (\tan \theta' - \tan \theta'') + \tan \phi' (\tan \theta'' - \tan \theta) + \tan \phi'' \times (\tan \theta - \tan \theta') = 0$$

22. समकोण गोलीय त्रिभुज OA_1A, $A_1 = 90°$ में कोण A न्यून कोण है। चाप A_1A_2 भुजा OA के लम्ब रूप खींचा गया। तत्पश्चात चाप A_2A_3, भुजा OA_1 के लम्ब रूप खींचा गया और यह क्रम अनन्त तक चलने दिया। सिद्ध करो कि

(i) $\text{सीमा}_{n \to \infty} A_n A_{n+1} = 9$

(ii) $\cos AA_1 \cos A_1A_2 \cos A_2A_3 \ldots\ldots \cos A_n \cos A_{n+1} + \ldots$ (अनन्त तक)

$$= \cos OA$$

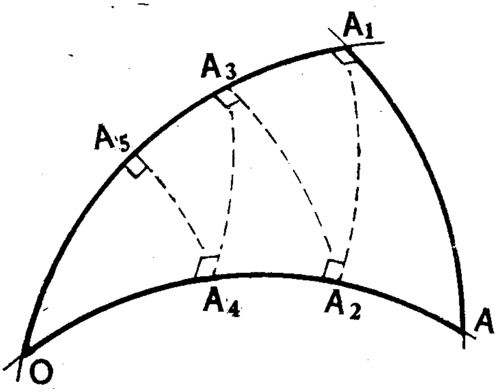
त्रिभुज OAA_1, $A_1 = 90°$ में,

$$\cos OA = \cos OA_1 \cos AA_1$$

$$\therefore \qquad \cos AA_1 = \frac{\cos OA}{\cos OA_1}$$

त्रिभुज OA_1A_2 में,

$$\cos A_1A_2 = \frac{\cos OA_1}{\cos OA_2}$$



आकृति 70

इसी प्रकार, $\cos A_2A_3 = \frac{\cos OA_2}{\cos OA_3}$, इत्यादि

और, $\cos A_n\, A_{n+1} = \frac{\cos OA_n}{\cos OA_{n+1}}$

$$\therefore \quad \cos AA_1 \cos A_1A_2 \cos A_2A_3 \ldots \cos A_n\, A_{n+1}$$

$$= \frac{\cos OA}{\cos OA_1} \cdot \frac{\cos OA_1}{\cos OA_2} \cdot \frac{\cos OA_2}{\cos OA_3} \cdot \cdot \frac{\cos O\, A_n}{\cos O\, A_{n+1}}$$

$$= \frac{\cos OA}{\cos OA_{n+1}} \qquad \ldots \quad (\text{अ})$$

सिद्ध करना है कि, $\text{सीमा}_{n \to \infty} A_n\, A_{n+1} = 0$

या, $\text{सीमा}_{n \to \infty} \cos (A_n\, A_{n+1}) = 1$

मान लो n अनन्त की ओर प्रवृत्त होता और $\cos(A_n\ A_{n+1})$ का मान एक की ओर प्रवृत्त नहीं होता,

अर्थात मान लो,

$$\text{सीमा}_{n\to\infty} \cos(A_nA_{n+1}) \neq 1$$

इस स्थिति में मान लो,

$$\cos AA_1 \cos A_1A_2 \ldots \cos A_nA_{n+1} .. = X$$

लघु-गुणक से,

$$\log X = \log\cos AA_1 + \log\cos A_1A_2 + \ldots$$

$$= -\infty \qquad \because \text{ प्रत्येक } \cos AA_1,\ \cos A_1A_2 \ldots$$

$$\therefore \qquad X = e = 0 \qquad \text{का मान एक से कम है।}$$

$$\therefore \qquad \text{सीमा}_{n\to\infty}(\cos AA_1,\ \cos A_1A_2 \ldots \cos A_nA_{n+1} \ldots) = 0$$

इसलिए (अ) से,

$$\text{सीमा}_{n\to\infty}\left(\frac{\cos OA}{\cos OA_{n+1}}\right) = 0$$

परन्तु, $\text{सीमा}_{n\to\infty} \cos OA_{n+1} \neq \infty$, क्योंकि कोसाइन फलन् का मान सदैव ± 1 के बीच होता है इसलिए,

$$\cos OA = 0$$

$$\therefore \qquad OA = \pi/2$$

अब त्रिभुज OAA_1 में, $A_1 = 90°$, $OA = \pi/2$ इसलिये,

नेपियर प्रथम नियम से,

$$\sin(90 - A) = \tan(90 - OA)\tan(AA_1)$$

या,

$$\cos A = \cot 90 \tan(AA_1)$$

$$= 0$$

$$\therefore \qquad A = \pi/2$$

जो कि असम्भव है क्योंकि $\angle A$, न्यून कोण दिया है। अतः हमारी कल्पना कि,

सीमा$_{n\to\infty}$ $\cos A_n A_{n+1} \neq 1$, असत्य स्थापित होती है।

अतः $$\text{सीमा}_{n\to\infty} \cos A_n A_{n+1} = 1$$

या, $$\text{सीमा}_{n\to\infty} A_n A_{n+1} = 0 \qquad \ldots \quad \text{(i)}$$

अब, त्रिभुज $OA_n A_{n+1}$, $\angle A_{n+1} = 90°$ में साइन सूत्र से,

$$\frac{\sin A_n A_{n+1}}{\sin \angle A_n OA_{n+1}} = \frac{\sin OA_n}{\sin 90°} = \sin OA_n$$

(i) से,

$$\text{सीमा}_{n\to\infty} \sin OA_n = \text{सीमा}_{n\to\infty} \frac{\sin A_n A_{n+1}}{\sin \angle A_n OA_{n+1}}$$
$$= 0$$

$$\therefore \qquad \text{सीमा}_{n\to\infty} OA_n = 0 \qquad \ldots \quad \text{(ब)}$$

(अ) और (ब) से,

$$\cos AA_1 \,.\, \cos A_1A_2 \ldots \ldots \cos A_nA_{n+1} = \frac{\cos OA}{\cos OA_{n+1}}$$

$$\therefore \cos AA_1 \,.\, \cos A_1A_2 \ldots . (\text{अनन्त तक})$$
$$= \text{सीमा}_{n\to\infty} \frac{\cos OA}{\cos (OA_{n+1})}$$
$$= \cos OA \qquad \ldots \text{(ii)} \;]$$

23. गोलीय त्रिभुज ABC, $C = 90°$ में, $\cos A = \cos^2 a$ है और कोण A, समकोण के बराबर नहीं है। सिद्ध करो कि

(i) $b + c = \pi/2$, यदि $b < \frac{\pi}{2}, c < \frac{\pi}{2}$

(ii) $b + c = 3\pi/2$, यदि $b > \frac{\pi}{2}, c > \frac{\pi}{2}$

[सागर, '69; विक्रम, '67]

24. गोलीय त्रिभुज $A B C$ में यदि $A = \pi/5$, $B = \pi/3$ और $C = \frac{\pi}{2}$ हो तो सिद्ध करो कि,

$$a + b + c = \frac{\pi}{2}$$ [इन्दौर, '69; विक्रम, '65]

25. गोलीय त्रिभुज ABC में, $C=120°$, यदि शीर्ष C से भुजा AB के लम्ब रूप खींचे गये चाप की लम्बाइयाँ $\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ है तो सिद्ध करो कि,

$$\cot^2 a+\cot^2 b+\cot a \cot b=1$$

26. एक समद्विबाहु गोलीय त्रिभुज के शीर्ष से खींचा गया चाप आधार को α और β खंडों में विभाजित करता है। यदि त्रिभुज की बराबर भुजाएँ a के तुल्य हैं और शीर्ष तथा आधार के बीच चाप की लम्बाइयाँ δ हैं तो सिद्ध करो करो कि,

$$\tan\tfrac{1}{2}\alpha \ \tan\tfrac{1}{2}\beta=\tan\left(\frac{\alpha+\delta}{2}\right)\tan\left(\frac{\alpha-\delta}{2}\right)$$

27. किसी गोलीय त्रिभुज ABC के शीर्ष बिन्दुओं से सम्मुख भुजाओं पर खींचे गये लम्बरूप चापों की लम्बाइयाँ क्रमशः θ, ϕ और ψ हैं। सिद्ध करो कि,

$$\sin a \sin \theta=\sin b \sin \phi=\sin c \sin \psi$$
$$=(1-\Sigma\cos^2 a+2\Pi\cos a)^{1\ 2}$$

[संकेत—धारा (5·7) देखो] [जिवाजी, '70; विक्रम, '62]

28. चतुर्थांशी त्रिभुज ABD में भुजा $c=\pi/2$ है तो सिद्ध करो कि

(i) $\cos A=\cos a \operatorname{cosec} b$

(ii) $\cos a=\tan B \cot C$

(iii) $\sin a=\sin A \operatorname{cosec} C$

(iv) $\tan a=\tan A \operatorname{cosec} B$

(v) $\cos B=\cos b \operatorname{cosec} a$

(iv) $\sin b=\sin B \operatorname{cosec} C$

(vii) $\cos b=-\tan A \cot C$

(viii) $\tan b=\tan B \operatorname{cosec} A$

अध्याय 6

गोलीय त्रिभुजों का निर्धारण

(SOLUTIONS OF SPHERICAL TRIANGLES)

6·1. प्रत्येक गोलीय त्रिभुज में छः अवयव होते हैं—तीन भुजाएँ और तीन कोण। समतल त्रिभुजों के समान ही गोलीय त्रिभुजों का निर्धारण वह क्रिया है जिसमें पर्याप्त अवयवों के ज्ञात मानों की सहायता से शेष अवयवों के मान ज्ञात किये जाते हैं। गोलीय त्रिभुजों के निर्धारण में उसकी भुजाओं और कोणों से सम्बन्धित धारा (3·1 और 3·2) के प्रतिबन्धों का ध्यान रखना अत्यन्त आवश्यक है। संख्यात्मक गणनाओं में पाँच अंकों वाले त्रिकोणमितीय सारणिक लघुगुणकों (Trigonometrical Tabular Logarithms) का उपयोग किया गया है। समतल त्रिभुजों का निर्धारण अध्ययन करते समय जिन विद्यार्थियों ने इन सारणियों का उपयोग नहीं किया है उन्हें चाहिये कि किसी सरल त्रिकोणमिति के मानक ग्रंथ से, अपना ज्ञान पूर्ण कर लें। इन सारणियों का उपयोग करते समय विशेष रूप से निम्न सावधानी रखना अत्यन्त आवश्यक है।

बहुत छोटे कोणों की गणना उनके कोसाइन फलनों के लघु गुणकों से और 90° के सन्निकट के कोणों की गणना उनके साइन फलनों से नहीं करना चाहिये क्योंकि ऐसी स्थिति में लघु गुणकों में विचरण (Variation) बहुत कम होता है। इस प्रकार के कोणों की गणना उनके टेन्जेन्ट फलनों के लघु गुणकों से करना वांछनीय है।

साधारणतः त्रिभुजों के निर्धारण की विधियों को हम दो खंडों में विभाजित कर सकते हैं। खंड (अ) में हम समकोण गोलीय त्रिभुजों, और खंड (ब) में तिर्यक (oblique) गोलीय त्रिभुजों के निर्धारण की विभिन्न विधियों का अध्ययन करेंगे।

(खण्ड अ)

6·2. समकोण गोलीय त्रिभुजो का निर्धारण

समकोण गोलीय त्रिभुज में समकोण के अतिरिक्त यदि दो और अवयव ज्ञात हों तो त्रिभुज का पूर्ण निर्धारण हो सकता है। समकोण गोलीय त्रिभुज ABC,

$C = 90°$ में समकोण को छोड़कर शेष पाँच अवयवों में से दो अवयवों को हम कुल दस प्रकार से चुन सकते हैं परन्तु इन दस स्थितियों का अध्ययन, निम्नलिखित छः स्थितियों के अन्तर्गत किया जा सकता है—

1. कर्ण और एक कोण (c, A या c, B)
2. एक भुजा और संलग्न कोण (a, B या b, A)
3. कर्ण के अतिरिक्त शेष दोनों भुजाएँ (a, b)
4. समकोण के अतिरिक्त शेष दोनों कोण (A, B)
5. कर्ण और एक भुजा (c, a या c, b)
6. एक भुजा और उसका सम्मुख कोण (a, A या b, B)

उपर्युक्त सभी स्थितियों में (अथवा कोई दो अवयवों को यादृच्छिक (random) चुनकर) त्रिभुज का निर्धारण करने पर निम्नलिखित सम्भावित परिणाम उपस्थित हो सकते हैं—(अ) त्रिभुज असम्भव, (ब) एक त्रिभुज, और (स) दो त्रिभुज।

हम देखेंगे कि परिणामस्वरूप दो त्रिभुज केवल उस स्थिति में प्राप्त होते हैं जब यादृच्छिक अवयवों में एक भुजा हो और दूसरा उसका सम्मुख कोण हो (अर्थात स्थिति 6)। ऐसी स्थिति को संदिग्ध स्थिति (Ambiguous case) कहते हैं। उदाहरण (3) में ऐसी स्थिति का हम विशेष रूप से अध्ययन करेंगे।

ऊपर लिखी छः विभिन्न स्थितियों का पृथक-पृथक अध्ययन करने की अपेक्षा निम्नलिखित विधि द्वारा एक साथ ही सब स्थितियों का अध्ययन सरलतापूर्वक हो सकता है। अतः यहाँ इस विधि का ही वर्णन किया गया है। इस विधि में निर्धारण की क्रिया को निम्नलिखित पदों में विभाजित करते हैं—

1. धारा (5·4) के अनुसार त्रिभुज के वृत्तीय अवयवों का एक कच्चा व्यवस्था चित्र खींचो और दिये हुए अवयवों को स्पष्ट करने के लिये उनके चारों ओर वृत्त खींचो।

2. उपर्युक्त नैपियर वृत्तीय अवयव नियम द्वारा दिये हुए दो अवयवों और एक अज्ञात अवयव के बीच सम्बन्ध दर्शाने वाला सूत्र लिखो। इस प्रकार तीनों अज्ञात अवयवों की गणना करने के लिए दिये हुए अवयवों के पदों में तीन सूत्र लिखो।

3. लघु गुणक सारणी की सहायता से संख्यात्मक गणना करो।

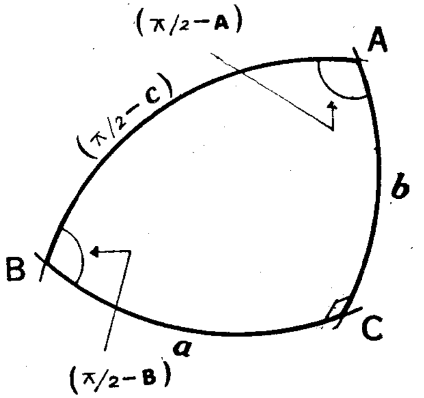
4. परिणामों की जाँच के लिए नैपियर नियम से ही तीनों अज्ञात अवयवों के बीच का सम्बन्ध लिखो और गणना द्वारा परिणामों की सत्यता की जाँच करो। गणना से प्राप्त अज्ञात अवयवों का, धारा (5·3) के चतुर्थांश नियमों को भी परिणामों की सत्यता प्रमाणित करने के उपयोग में लाया जा सकता है।

टिप्पणी—गणनाओं में जब किसी अवयव का मान उसके साइन फलन से ज्ञात करना पड़ता है तो उस अवयव के दो मान प्राप्त होते हैं। [क्योंकि, $\sin\theta=\sin(180^\circ-\theta)$], ऐसी स्थिति में अभीष्ट मान ज्ञात करने के लिए धारा (5·3) के चतुर्थांश नियमों का उपयोग करना चाहिये।

उपर्युक्त विधि के पदों की विस्तृत व्याख्या के लिए निम्नलिखित उदाहरणों का ध्यानपूर्वक अध्ययन करो।

6·2.1. उदाहरण 1. समकोण त्रिभुज ABC, $C=90^\circ$ का निर्धारण करो जिसमें $A=65^\circ$ और $B=118^\circ$ है।

क्रिया—1. वृत्तीय अवयवों का कच्चा व्यवस्था चित्र।



आकृति 71

2. (i) a का मान ज्ञात करने के लिए, $(\pi/2-A)$ को मध्य भाग और a तथा $(\pi/2-B)$ को विपरीत भाग मानकर, नैपियर द्वितीय नियम से,

$$\sin(\pi/2-A)=\cos a\cos(\pi/2-B)$$

या,
$$\cos a=\cos A\ \mathrm{cosec}\ B$$

(ii) इसी प्रकार, b का मान ज्ञात करने के लिए $(\pi/2-B)$ को मध्य भाग और b तथा $(\pi/2-A)$ को विपरीत भाग मानने पर,

$$\sin(\pi/2-B)=\cos b\cos(\pi/2-A)$$

या,
$$\cos b=\cos B\ \text{cosec}\ A$$

(iii) और c का मान ज्ञात करने के लिए, $(\pi/2-c)$ को मध्य भाग और $(\pi/2-A)$ तथा $(\pi/2-B)$ को आसन्न भाग मानकर नैपियर के प्रथम नियम से,

$$\sin(\pi/2-c)=\tan(\pi/2-A)\tan(\pi/2-B)$$

या,
$$\cos c=\cot A\cot B$$

(iv) अंत में, जाँच के लिए, $(\pi/2-c)$ को मध्य भाग तथा a और b को विपरीत भाग मानने पर, नैपियर द्वितीय नियम से,

$$\sin(\pi/2-c)=\cos a\cos b$$

या,
$$\cos c=\cos a\cos b$$

3. उपयु्क्त परिणामों से संख्यात्मक गणना करने के लिए पृष्ठ 194 पर दी गई सारणी व्यवस्था अत्यन्त सुविधाजनक सिद्ध होती है।

4. (i) सारणी की अंतिम पक्ति की संख्याओं से गणना द्वारा प्राप्त अज्ञात अवयवों के मान जाँच सूत्र को सन्तुष्ट करते हैं।

(ii) परिणामों की सत्यता की जाँच हम चतुर्थांश नियमों से भी कर सकते हैं। जैसे a, A तथा b, B को एक ही चतुर्थांश में होना चाहिये (प्रथम चतुर्थांश नियम से)। सारणी से हम देख सकते हैं कि गणना से प्राप्त परिणाम उपर्युक्त नियमों का पालन करते हैं।

अतः त्रिभुज के निर्धारण से,

$$\left.\begin{aligned}a&=61^\circ\ 24'\ 1''\\ b&=141^\circ\ 11'\ 49''\\ c&=124^\circ\ 21'\ 20''\end{aligned}\right\}\quad \text{उत्तर}$$

टिप्पणी

1. यह सारणिक गणना व्यवस्था संयुक्त राज्य अमेरिका के नौसेना विभाग (Navy Department) में गणनाओं के लिए प्रचलित है।

लघुगुणक गणना सारणी

	(*a*)	(*b*)	(*c*)
$A = 65°$	$L \cos = 9.62595$	$L \operatorname{cosec} = .04272$	$L \cot = 9.66867$
$B = 180°$	$L \operatorname{cosec} = .05407$	$L \cos = 9.67161$	$L \cot = 9.72567\ (n)$
$\therefore\ a = 61°24'1''$	$L \cos = 9.68002$		
$b = 141°11'49''$	$L \cos = 9.71433 (n)$	$L \cos = 9.71433\ (n)$	
$c = 124°21'20''$	$L \cos = 9.39435\ (n)$		$L \cos = 9.39434\ (n)$

2. सारणी को पंक्तियों के मानों से भरना प्रारम्भ करना चाहिये।

3. हम जानते हैं कि साइन और कोसाइन फलनों का मान कभी भी एक से अधिक नहीं हो सकता इसलिए इन फलन का लघुगुणक सदैव एक ऋणात्मक संख्या होता है। इसी प्रकार 45° से कम कोणों के टैन्जेन्ट फलनों और 45° से अधिक के कोणों के कोटैन्जेन्ट फलनों के लघु गुणक भी ऋणात्मक होते हैं। गणना सारणी में ऋणात्मक संख्याओं से बचने के लिए यह सुविधाजनक होता है कि लघु गुणक के मान को दस से बढ़ाकर लिखा जाये। इस प्रकार बढ़े हुए मान को सारणिक लघु गुणक (Tabular Logarithms) कहते हैं जिसे दर्शाने के लिए फलन के पहले L अक्षर का प्रयोग किया जाता है। अतः

$$\theta, L\ \sin = \sin\theta \text{ का सारणिक लघुगुणक}$$

$$= \sin\theta \text{ का वास्तविक लघुगुणक} + 10$$

सामान्यतः लघुगुणक सारणियों से हमें फलनों के वास्तविक लघुगुणकों के मान प्राप्त होते हैं जिन्हें हम सारणिक लघुगुणकों में परिवर्तित करके अपनी गणनाओं में प्रयोग करते हैं।

4. लघुगुणक के बाद लिखा अक्षर n यह दर्शाता है कि उसका प्रतिलघुगुणक (त्रिकोणमितीय फलन का मान) ऋणात्मक है और इसके विपरीत n का उपस्थित न होना प्रतिलघुगुणक का धनात्मक होना दर्शाता है।

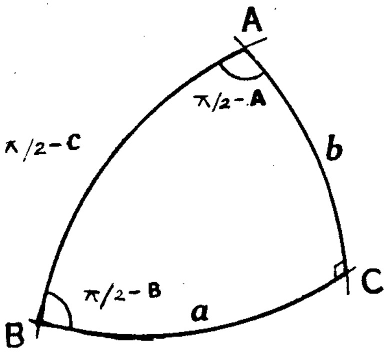
जैसे, (i) a, की गणना में, $\cos A = \cos 65^\circ$ और $\operatorname{cosec} B = \operatorname{cosec} 118^\circ$ दोनों धनात्मक फलन हैं इसलिए इनका गुणनफल, $\cos a$, भी धनात्मक होना चाहिये और इसलिए $a < 90^\circ$ होना चाहिये। अतः $a = 61^\circ 24' 1''$।

(ii) b, की गणना में $\operatorname{cosec} A > 0$ और $\cos B = \cos 118^\circ < 0$ हैं। अतः इनका गुणनफल, $\cos b$, का मान भी ऋणात्मक होगा, परिणामस्वरूप $b > 90^\circ$ होना चाहिये। अतः सारणी से प्राप्त b का मान, $58^\circ 48' 11''$ जो 90° से कम है, उपयुक्त नहीं है इसलिए $b = (180^\circ - 58^\circ\ 48'\ 11'') = 141^\circ\ 11'\ 49''$ लेंगे जो 90° से अधिक है। संकेत में इसी बात को दर्शाने के लिए n अक्षर का प्रयोग किया गया है। इसी प्रकार, c की गणना में भी $\cos c$ का मान ऋणात्मक है इसलिए $c > 90^\circ$ होना चाहिये, अतः $c = (180^\circ - 75^\circ\ 30'\ 40'') = 124^\circ\ 21'\ 20''$ लेंगे।

5. गणना की सारणी में स्तम्भों (columns) का क्रम जाँच सूत्र से निर्धारित किया जाता है। जाँच सूत्र के वाम पक्ष का अवयव, सारणी का अंतिम स्तम्भ निर्धारित करता है।

उदाहरण 2. समकोण गोलीय त्रिभुज $ABC, C=90°$ का निर्धारण करो जिसमें $a=153°41'$ और $c=132°10'$ है।

क्रिया 1. वृत्तीय अवयवों का व्यवस्था चित्र,



आकृति 72

2. (i) A के लिए, a मध्यभाग, $(\pi/2-A)$, $(\pi/2-c)$ विपरीत भाग, नैपियर द्वितीय नियम से,

$$\sin a = \cos(\pi/2-A)\cos(\pi/2-c)$$

या,
$$\sin A = \sin a \operatorname{cosec} c$$

(ii) B के लिए, $(\pi/2-B)$ मध्य भाग, $(\pi/2-c)$ और a, आसन्न भाग, नैपियर प्रथम नियम से,

$$\sin(\pi/2-B) = \tan(\pi/2-c)\tan a$$

या,
$$\cos B = \tan a \cot c$$

(iii) b के लिए, $(\pi/2-c)$ मध्य भाग, a और b, विपरीत भाग, नैपियर प्रथम नियम से,

$$\sin(\pi/2-c) = \cos a \cos b$$

या,
$$\cos c = \cos a \cos b$$

3. संख्यात्मक गणना की सारणी

	(A)	(b)	(B)
$a = 153°41'$ $c = 132°10'$	$L \sin = .64673$ $L \operatorname{cosec} = 9.13007$	$L \sec = .04752\ (n)$ $L \cos = 9.82691\ (n)$	$L \tan = 9.69425\ (n)$ $L \cot = 9.95697\ (n)$
$A = 143°15'50''$ $36°44'10''$	$L \sin = 9.77680$		
	$L \cos = 9{\cdot}87443$	$L \cos = 9.87443$	
$B = 63°23'16''$	$L \cos = 9.65123$		$L \cos = 9.65122$

(iv) जाँच के लिए, $(\pi/2-B)$ मध्य भाग, $(\pi/2-A)$ और b, विपरीत भाग, नैपियर द्वितीय नियम से,

$$\sin(\pi/2-B)=\cos(\pi/2-A)\cos b$$

या,
$$\cos B=\sin A\cos b$$

3. संख्यात्मक गणना की सारणी। पृष्ठ 197 देखो।

4. (i) सारणी की अंतिम पंक्ति में हम देखते हैं कि गणनाओं द्वारा प्राप्त अज्ञात अवयवों के सारणिक लघुगुणक जाँच सूत्र को सन्तुष्ट करते हैं।

(ii) चतुर्थांश नियमों से, a, A और b, B एक ही चतुर्थांश में होना चाहिये। अब चूँकि $a>90$, दिया है, इसलिए A के दो मानों में से $A=143°\ 15'50''$ उपयुक्त मान है।

चूँकि $c=132°10'>90$, दिया है, इसलिए a और b चतुर्थांश नियम से विभिन्न चतुर्थांशों में होना चाहिये जो सारणी से स्पष्ट है।

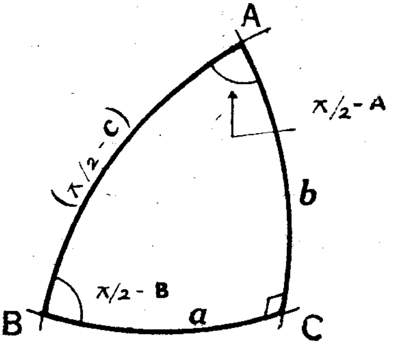
अतः त्रिभुज के निर्धारण से,

$$\left.\begin{aligned}A&=143°\ 15'\ 50''\\ b&=41°\ 30'\ 16''\\ B&=63°\ 23'\ 16''\end{aligned}\right\}\text{ उत्तर}$$

उदाहरण 3. समकोण गोलीय त्रिभुज ABC का निर्धारण करो जिसमें

$$C=90°,\ A=46°\ 15'25'',\ a=42°18'45''$$

क्रिया—1. वृत्तीय अवयवों का व्यवस्था चित्र।



आकृति 73

2. (i) b; b मध्य भाग, a और $(\pi/2-A)$ आसन्न भाग, नैपियर प्रथम नियम से,

$$\sin b = \tan a \tan (\pi/2-A)$$

या,
$$\sin b = \tan a \cot A$$

(ii) B; $(\pi/2-A)$ मध्य भाग, a और B विपरीत भाग, नैपियर द्वितीय नियम से,

$$\sin (\pi/2-A) = \cos a \cos (\pi/2-B)$$

या,
$$\sin B = \cos A \sec a$$

(iii) c; a मध्य भाग, $(\pi/2-A)$ और $(\pi/2-c)$ विपरीत भाग, नैपियर द्वितीय नियम से,

$$\sin a = \cos (\pi/2-A) \cos (\pi/2-c)$$

या,
$$\sin c = \sin a \operatorname{cosec} A$$

(iv) जाँच सूत्र, b मध्य भाग, $(\pi/2-c)$ और $(\pi/2-B)$ विपरीत भाग नैपियर द्वितीय नियम से,

$$\sin b = \cos (\pi/2-c) \cos (\pi/2-B)$$

या,
$$\sin b = \sin c \sin B$$

3. संख्यात्मक गणना की सारणी। पृष्ठ 200 देखो।

4. (i) सारणी की पाँचवीं पंक्ति में हम देखते हैं कि गणनाओं द्वारा प्राप्त, अज्ञात अवयवों के सारणिक लघुगुणक जाँच सूत्र को सन्तुष्ट करते हैं।

(ii) अज्ञात अवयवों के मान चूँकि उनके साइन फलनों से ज्ञात किये गये हैं इसलिए प्रत्येक ऐसे अवयवों के दो मान सारणी में दर्शाये गये हैं। अब यदि हम c का मान, $c = 68°43' < 90°$ चुनें तो चतुर्थांश नियम से शेष अवयव भी 90° से कम होना चाहिये। अतः

$$c = 68°43', B = 69°14', b = 60°36'17'',$$

दिये हुए अवयवों के साथ एक त्रिभुज निर्धारित करते हैं।

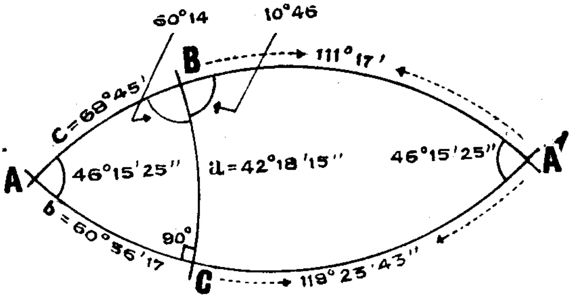
और यदि, $c = 111°17' > 90°$ चुनें तो चतुर्थांश नियम से a, b तथा A, B विपरीत चतुर्थांशों में स्थित होना चाहिये। अब चूँकि $A < 90°$ दिया है इसलिए B, 90° से बड़ा होना चाहिये अतः $B = 110°46'$। और चूँकि $a < 90°$ दिया है इसलिए $b > 90°$ होना चाहिये, अतः $b = 119°23'43''$।

3. संख्यात्मक गणना की सारणी

	(c)	(B)	(b)
$A=46°15'25''$	L cosec $=.14120$	L cos $=9.83985$	L cot $=9.98094$
$a=42°18'45''$	L sin $=9.82812$	L sec $=.13107$	L tan $=9.95919$
$\therefore\ c=68°43'$ या, $111°17'$	L sin $=9.96932$		
$B=69°14'$ या, $110°46'$	L sin $=9.97082$	L sin $=9.97082$	
$b=60°36'17''$ या, $119°23'43''$	L sin $=9.94014$		L sin $=9.94013$

इस प्रकार हम देखते हैं कि अवयव $c=111°17'$, $B=110°46'$ और $b=119°23'43''$ दिये हुए अवयवों के साथ एक और त्रिभुज का निर्धारण करते हैं।

निम्नांकित आकृति में उपर्युक्त दोनों त्रिभुज दर्शाये गये हैं,



आकृति 74

मान लो, त्रिभुज ABC, जिसमें $C=90°$, $A=46°15'25''$ और $a=42°18'45''$ हैं, दिया गया है। भुजा AB और AC के चापों को बढ़ाया जो A' बिन्दु पर फिर से एक दूसरे को काटती हैं। इस प्रकार इंदुक AA' की रचना हुई। आकृति में, गणना द्वारा प्राप्त प्रथम त्रिभुज ABC द्वारा दर्शाया गया है और द्वितीय त्रिभुज उसका सह-इंदुक त्रिभुज $A'BC$ है।

$$\text{उत्तर}\left\{\begin{array}{ll}1. & c=68°43',\ B=60°14',\ b=60°36'17'' \\ 2. & c=111°17',\ B=110°46',\ b=119°23'43''\end{array}\right\}$$

प्रश्न संग्रह 9

निम्नलिखित ABC गोलीय त्रिभुजों का निर्धारण करो जिनमें $C=90°$।

1. $c=119°;\ A=61°24'$
2. $c=152°24'24'',\ B=68°38'12''$
3. $b=121°42'30'',\ A=154°\ 8'\ 36''$
4. $a=30°\ 45'\ 18'',\ B=135°\ 24'\ 24''$
5. $a=55°\ 18',\ b=39°\ 27'$

6. $a=40^\circ 44'36''$, $b=64^\circ 48' 18''$

7. $A=36^\circ$, $B=60^\circ$

8. $A=67^\circ 38' 48''$, $B=155^\circ 12' 36''$

9. $c=122^\circ 36'42''$, $b=158^\circ 22' 24''$

10. $c=59^\circ 12'$, $a=46^\circ 30'$

11. $a=46^\circ 46' 24''$, $A=57^\circ 28' 18''$

12. $b=147^\circ 5'$, $B=124^\circ 37'$

निम्नलिखित ABC चतुर्थांशी त्रिभुजों का निर्धारण करो जिनमें $c=\frac{\pi}{2}$,

13. $a=138^\circ 4'$, $b=109^\circ 41'$

14. $A=32^\circ 53' 36''$, $B=115^\circ 24' 54''$

समद्विबाहु त्रिभुज ABC का निर्धारण करो जिसमें

15. $a=b=78^\circ 23'30''$, $c=118^\circ 54'36''$

उत्तर

1. $a=50^\circ 10'$, $b=139^\circ 11'$, $B=131^\circ 38' 30''$

2. $b=169^\circ 13' 12''$, $b=25^\circ 33' 12''$, $A=156^\circ 11' 6''$

3. $a=157^\circ 35\ 42''$, $c=60^\circ 55'30''$, $B=103^\circ 15' 6''$

4. $A=52^\circ 53' 24''$, $b=153^\circ 14' 42''$, $c=140^\circ 7'$

5. $c=63^\circ 55' 21''$, $A=66^\circ 15' 6''$, $B=45^\circ 1' 31''$

6. $A=43^\circ 35' 30''$, $B=72^\circ 55' 48''$, $c=71^\circ 11' 6''$

7. $a=20^\circ 54' 18.5''$, $b=31^\circ 43' 3''$, $c=37^\circ 21' 38{\cdot}5''$.

8. $a=24^\circ 54' 12''$, $b=169^\circ$, $c=152^\circ 55' 12''$

9. $a=54^\circ 34'$, $A=75^\circ 18' 18''$, $B=154^\circ 3' 12''$

10. $A=57^\circ 37'$, $B=51^\circ 5'$, $b=41^\circ 56'$

11. $b_1=42^\circ 43'36''$, $c_1=59^\circ 47'42''$, $B_1=51^\circ 43'48''$
$b_2=137^\circ 16'24''$, $c_2=120^\circ 12'18''$, $B_2=128^\circ 16'12''$

12. $a_1=26^\circ 32'30''$, $c_1=138^\circ 40'30''$, $A_1=42^\circ 35'30''$
$a_2=153^\circ 27'30''$, $c_2=41^\circ 19'30''$, $A_2=137^\circ 24'30''$

13. $A=142^\circ 11'38''$, $B=120^\circ 15'57''$, $C=113^\circ 28'2''$

14. $a=35^\circ 36'18''$, $b=104^\circ 28'12''$, $C=68^\circ 52'42''$

15. $A=B=71^\circ 10'18''$, $c=115^\circ 2'48''$

(खन्ड ब)

तिर्यक त्रिभुजों का निर्धारण

(SOLUTION OF OBLIQUE SPHERICAL TRIANGLES)

6·3. तिर्यक त्रिभुजों का व्यापक निर्धारण का अध्ययन करने के पूर्व उन स्थितियों का अध्ययन करना सुविधाजनक होगा जिनमें हम धारा (6.2) के ज्ञान से ही तिर्यक त्रिभुजों का भी निर्धारण कर सकते हैं।

अतः

1\. जब दिये हुए त्रिभुज की एक भुजा एक चतुर्थांश के तुल्य हो।

ऐसी स्थिति में दिये हुए त्रिभुज का ध्रुवीय त्रिभुज एक समकोण त्रिभुज होगा। ऐसे त्रिभुजों को, जिनकी एक भुजा चतुर्थांश के तुल्य होती है, चतुर्थांशी त्रिभुज (Quadrantal triangle) कहते हैं। अतः चतुर्थांशी त्रिभुजों के निर्धारण में उनके ध्रुवीय त्रिभुजों (जो समकोण त्रिभुज होते है) का निर्धारण करके, ध्रुवीय त्रिभुजों के गुण-धर्मों की सहायता से, आधारी त्रिभुजों (अर्थात चतुर्थांशी त्रिभुजों) के अवयव ज्ञात कर सकते हैं।

2\. जब दिये हुए त्रिभुज की दो भुजाएँ या दो कोण परस्पर बराबर हों।

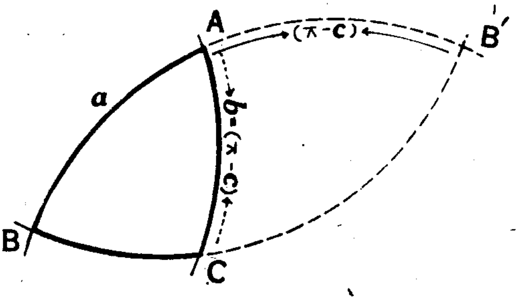
ऐसी स्थिति में त्रिभुज एक समद्विबाहु त्रिभुज होता है जिसके शीर्ष बिन्दु को आधार के मध्य बिन्दु से मिलाने वाला दीर्घवृत्त चाप उसे दो समकोण त्रिभुजों में विभाजित करता है।

इन दो समकोण त्रिभुजों में से किसी एक का निर्धारण करने से अभीष्ट अवयव प्राप्त किये जा सकते हैं।

3\. जब दिये हुए त्रिभुज की दो भुजाएँ या दो कोण परस्पर सम्पूरक हों। मान लो,

$$b+c=\pi$$

ऐसी स्थिति में, BA और BC को बढ़ाने पर, मान लो, वे B' बिन्दु पर मिलती हैं। तब



आकृति 75

आकृति में दर्शाये अनुसार त्रिभुज $B'AC$ इस प्रकार का त्रिभुज होगा जिसमें भुजा $AB'=\pi-c$ और $AC=b=\pi-c$, क्योंकि $b+c=\pi$ है। अतः $B'AC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसका निर्धारण हम (2) के अनुसार कर सकते हैं।

जब दिया हुआ त्रिभुज इन विशेष स्थितियों के अन्तर्गत नहीं आता है तब उसके निर्धारण के लिए उसके तीन अवयव ज्ञात होना आवश्यक है। त्रिभुज के छः अवयवों में से तीन अवयव विभिन्न प्रकार से चुने जा सकते हैं परन्तु इन विभिन्न स्थितियों का व्यापक अध्ययन हम निम्नलिखित छः स्थितियों के अन्तर्गत कर सकते हैं। विशेष परिस्थितियों में कुछ संदिग्धताएँ आती हैं जिनका निराकरण गोलीय त्रिभुजों की ज्यामिति [धारा (3.8)] की सहायता से कर सकते हैं।

6·3.1. विभिन्न स्थितियाँ

1. जब त्रिभुज की तीनों भुजाएँ ज्ञात हों।
2. जब त्रिभुज के तीनों कोण ज्ञात हों।
3. जब त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनके बीच का कोण ज्ञात हों।
4. जब त्रिभुज के दो कोण और उनके बीच की भुजा ज्ञात हो।
5. जब त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनमें से किन्हीं एक का सम्मुख कोण ज्ञात हो।
6. जब त्रिभुज के दो कोण और उनमें से किसी एक की सम्मुख भुजा ज्ञात हो।

6·3.2. इस धारा में उपर्युक्त स्थितियों में से कुछ के अन्तर्गत एक-एक उदाहरण, पूर्ण व्याख्या के साथ, हल किया गया है। विभिन्न स्थितियों में त्रिभुज कानिर्धारण करने में, अध्याय 4 में स्थापित, विशेष सूत्रों का उपयोग सुविधाजनक और सरल सिद्ध होता है। अतः विद्यार्थी को यह ध्यान में रखना हितकर होगा कि किस स्थिति में कौन से सूत्रों का प्रयोग किया गया है।

स्थिति 1 (तीन भुजाएँ)।

उदाहरण 1. तिर्यक गोलीय त्रिभुज ABC का निर्धारण करो जिसमें

$$a=70°14'\ 20'',\ b=49°24''90'', c=38°46'10''$$

क्रिया—अध्याय 4 की धारा (4.6) के अर्ध कोणसूत्रों से,

(i) $\tan r=\sqrt{\dfrac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}$

(ii) $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{\tan r}{\sin(s-a)}$

(iii) $\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{\tan r}{\sin(s-b)}$

(iv) $\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{\tan r}{\sin(s-c)}$

(v) जाँच सूत्र

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}$$

2. गणना $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$

$=79°12'20''$

$\therefore$ $s-a$ $=8°58'0''$

$s-b$ $=29°48'10''$

$s-c$ $=40°26'10''$

सारणिक लघुगुणक गणना

		(*A*)	(*B*)	(*C*)
$s-a=8^\circ 58'$	$L \sin=9.19290$	L cosec = ·80710		
$s-b=29^\circ 48' 10''$	$L \sin=9.69636$		L cosec = .30364	
$s-c=40^\circ 26' 10''$	$L \sin=9.81198$	$L \tan=9.35449$		L cosec = .18802
$s=79^\circ 12' 20''$	L cosec = .00775		$L \tan=9.35449$	$L \tan=9.35449$
	$L \tan^2=.70899$			
r	$L \tan=9.35559$			
$\frac{1}{2}A=55^\circ 25' 17''$ $\therefore A=110^\circ 50' 34''$		$L \tan=·16159$		
$\frac{1}{2}B=24^\circ 28' 18''$ $\therefore B=48^\circ 56' 36''$			$L \tan=9.65813$	
$\frac{1}{2}C=19^\circ 13' 36''$ $\therefore C=38^\circ 27' 12''$				$L \tan=9.54251$
$a=70^\circ 14' 20''$	$L \sin 9.97363$	$b\ 49^\circ 24' 10''$	$L \sin 9.88041$	$c\ 38^\circ 46' 10''$ $L \sin$ 9.79671
$A=110^\circ\ 50' 34'$	L cosec .029401	$B\ 48^\circ 56' 36''$	L cosec.12260	$C\ 38^\circ 27' 12''$ L cosec .20630
	·00302		.00301	.00301

3. (i) सारणी में, जाँच की अंतिम पंक्ति में, हम देखते हैं गणना द्वारा प्राप्त, अज्ञात अवयवों के मान जाँच सूत्र को सन्तुष्ट करते हैं।

(ii) प्राप्त मानों से स्पष्ट है कि बड़े कोण की सम्मुख भुजा छोटे कोण की सम्मुख भुजा से बड़ी है। इससे भी परिणामों की सत्यता प्रमाणित होती है।

अतः $A=110° \, 50' \, 34''$, $B=48° \, 56' \, 36''$, $C=38° \, 27' \, 12''$

टिप्पणी–1. स्थिति 1 के निर्धारण के लिए कोसाइन सूत्र,

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

और इसी प्रकार B और C के लिए सूत्रों का प्रयोग किया जा सकता है। परन्तु ये सूत्र लघु गुणक गणनाओं के लिए सुविधाजनक नहीं हैं क्योंकि प्रत्येक कोण की गणना में बहुत से फलनों के लघुगुणक सारणी में देखने पड़ेंगे। अतः प्रत्येक स्थिति में उपयुक्त, सुविधाजनक सूत्र चुनना अत्यन्त आवश्यक है, जैसे—उदाहरण 1 में $\tan r$ का लघुगुणक एक बार प्राप्त कर लेने के बाद प्रत्येक कोण की गणना में हमें केवल एक बार सारणी और देखना पड़ती है।

2. अध्याय 7 की धारा (7·1·2) में हम देखेंगे कि r का जो मान यहाँ माना है वह त्रिभुज के अन्तर्गत वृत्त की गोलीय त्रिज्या दर्शाता है, परन्तु यहाँ r के इस अर्थ से कोई विशेष प्रयोजन नहीं है, केवल सूत्र स्मरण रखने में यह अवश्य सहायक हो सकता है।

स्थिति 3 (दो भुजाएँ और बीच का कोण)

उदाहरण 2. गोलीय त्रिभुज ABC का निर्धारण करो जिसमें, $a=72°$, $b=48°$ और $C=50°$

क्रिया—1 (i) A और B की गणना के लिए नैपियर सादृश्यताओं से,

$$\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)=\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sec\left(\frac{a+b}{2}\right)\cot\frac{C}{2}$$

$$\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)=\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\text{cosec}\left(\frac{a+b}{2}\right)\cot\frac{C}{2}$$

2. सारणिक लघुगणक गणना

	$\left(\frac{A+B}{2}\right)$	$\left(\frac{A-B}{2}\right)$	(c)
$\frac{1}{2}(a-b)=12°$	$L\cos=9.99040$	$L\sin=4.31788$	$L\tan=9.32747$
$\frac{1}{2}(a\ b)=60°$	$L\sec=\ .30103$	L coses$=.06247$	
$\frac{C}{2}=25°$	$L\cot=\ .33133$	$L\cot=.33133$	
$\frac{1}{2}(A+B)=76°35'35''$	Ltan$=\ .62276$		$L\sin=9.98800$
$\frac{1}{2}(A-B)=27°14'30''$		$L\tan=9.71168$	L cosec$=.33938$
$\therefore A=103°50'5''$ $B=49°21'5''$			
$\frac{c}{2}=24°18'32''$ $\therefore c=48°37'4''$			$L\tan=9.65485$

जाँच

$a=27°$	$L\sin=9.97821$	$b=48°$	$L\sin=9.87107$	$c=48°37'4''$	$L\sin=9.87525$
$A=103°50'5''$	L cosec$=.01280$	$B=49°21'5''$	L cosec$=.11993$	$C=50°$	Lcosec$=.11575$
	9.99101		9.99100		9.99100

3. जाँच की अंतिम पंक्ति से हम देखते हैं कि गणनाओं द्वारा प्राप्त, अज्ञात अवयवों के मान जाँच सूत्र को संतुष्ट करते हैं। अतः प्राप्त मान ठीक हैं।

(ii) c की गणना के लिए, A और B के उपर्युक्त मानों और नेपियर सादृश्यताओं से,

$$\tan\frac{C}{2}=\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{cosec}\left(\frac{A-B}{2}\right)\tan\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

(iii) जाँच सूत्र,

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}$$

[गणना की सारणी पृष्ठ 208 पर देखिये।]

उत्तर—$A=103°50'\ 5''$, $B=49°21'\ 5''$, $C=48°37'4''$

टिप्पणी 1. c की गणना के लिए, साइन सूत्र,

$$\sin c=\frac{\sin a\sin C}{\sin A}$$

का अनुप्रयोग किया जा सकता है परन्तु इस स्थिति में c के दो मान ज्ञात होते हैं (क्योंकि 180° से कम मान वाले दो कोणों के साइन बराबर होते हैं) और संदिग्ध स्थिति उपस्थित होती है, जिसका निराकरण करने में क्रिया अनावश्यक लम्बी हो जाती है।

2. c की गणना के लिए, कोसाइन सूत्र,

$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C$$

का अनुप्रयोग भी उपयुक्त है क्योंकि इससे हम c का संदिग्धतारहित मान प्राप्त कर सकते हैं, साथ ही हमे A और B के मानों की आवश्यकता भी नहीं होती है। परन्तु यह सूत्र सारणिक लघुगुणकों में गणना के लिए उपर्युक्त नहीं है। इसे निम्नलिखित सहायक फलन की सहायता से लघुगुणक गणना के उपयुक्त बनाया जा सकता है।

$$\tan\theta=\tan b\cos C$$

$$\cos c=\cos b\,(\cos a+\sin a\tan\theta)$$

$$=\frac{\cos b\cos(a-\theta)}{\cos\theta}$$

स्थिति 5 (दो भुजाएँ और एक सम्मुख कोण)

व्याख्या—मान लो a, b और A ज्ञात हैं। सर्व प्रथम हम कोण B का मान साइन सूत्र,

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a} \sin A \qquad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

द्वारा प्राप्त करेंगे। अब c और C की गणना निम्नलिखित नैपियर सादृश्यताओं से कर सकते हैं।

$$\tan \frac{C}{2} = \sin \left(\frac{a-b}{2}\right) \operatorname{cosec} \left(\frac{a+b}{2}\right) \cot \left(\frac{A-B}{2}\right) . \quad . \text{(ii)}$$

और,

$$\tan \frac{c}{2} = \sin \left(\frac{A+B}{2}\right) \operatorname{cosec} \left(\frac{A-B}{2}\right) \tan \left(\frac{a-b}{2}\right) \qquad . \quad . \quad . \quad \text{(iii)}$$

चूंकि (i) में, B की गणना उसके साइन फलन से करना है अतः उसके दो मान प्राप्त होंगे और इन दोनों मानों के लिए दो त्रिभुज भी सम्भव हो सकते हैं। यदि $\sin B$ का मान गणना में एक से बड़ा आता है तब कोई भी त्रिभुज सम्भव नहीं होगा।

B दो के मान

इन मानों को ग्रहण करने के लिए यह आवश्यक है कि (ii) और (iii) में उन्हें प्रतिस्थापित करने पर $\tan \frac{C}{2}$ और $\tan \frac{c}{2}$ के धनात्मक मान प्राप्त हों। अब चूंकि $\sin \left(\frac{a+b}{2}\right)$ और $\sin \left(\frac{A+B}{2}\right)$ के मान धनात्मक हैं तथा $\left(\frac{a-b}{2}\right)$ और $\left(\frac{A-B}{2}\right)$ के संख्यात्मक मान, त्रिभुज की भुजाओं और कोणों के प्रतिबन्धों के अन्तर्गत 90° से कम हैं, अतः उपर्युक्त शर्त की पूर्ति के लिए केवल यह आवश्यक है कि "$(a-b)$ और $(A-B)$ के चिन्ह समान हों।" संक्षेप में, हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि इस स्थिति में, त्रिभुज के निर्धारण में एक, दो या कोई त्रिभुज सम्भव नहीं की स्थितियाँ B के प्राप्त मानों पर निर्भर करती हैं। मान लो B के दो मान B_1 और B_2 इस प्रकार है कि (i) $(A-B_1)$ और $(A-B_2)$ के वही चिन्ह हैं जो $(a-b)$ के, तब B के दोनों मानों के लिए दो त्रिभुज प्राप्त होंगे।

(ii) केवल $(A—B_1)$ का चिन्ह $(a—b)$ के चिन्ह के समान है, तब केवल एक त्रिभुज सम्भव होगा।

(iii) B_1 और B_2 दोनों मानों के लिए $(A—B)$ और $(a—b)$ के चिन्ह समान नहीं हैं, तब कोई भी त्रिभुज सम्भव नहीं होगा।

निम्नलिखित उदाहरणों को विशेष रूप से एक और दो त्रिभुज वाली स्थितियों के लिए चुना गया है और पूर्ण व्याख्या के साथ हल किया गया है।

उदाहरण—3. त्रिभुज ABC का निर्धारण करो जिसमें,

$$a=52°, b=37°, A=64°$$

क्रिया—1. B की गणना के लिए, साइन सूत्र,

$$\sin B=\sin b \operatorname{cosec} a \sin A$$

सारणिक लघुगुणक गणना

	(B)
$b=37°$	$L \sin=9.77946$
$a=52°$	$L \operatorname{cosec}=.10347$
$A=64°$	$L \sin=9.95366$
$\therefore$ $B_1=43°20'50''$	$L \sin=9.83659$
या, $B_2=136°39'10''$	

चूंकि, $(a—b)$ शून्य से अधिक है और $(A—B)$, B के केवल प्रथम मान $(B_1=43° 20' 50'')$ के लिए शून्य से अधिक है इसलिए व्याख्या के अनुसार केवल एक त्रिभुज सम्भव है। $B_2=136° 39' 10''$ के लिए त्रिभुज असम्भव है।

2. अब, c और C की गणना के लिए, B_1 और नैपियर सादृश्यताओं से,

$$\tan\frac{C}{2}=\sin\left(\frac{a—b}{2}\right) \operatorname{cosec}\left(\frac{a+b}{2}\right) \cot\left(\frac{A—B}{2}\right)$$

और $$\tan\frac{C}{2}=\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \operatorname{cosec}\left(\frac{A—B}{2}\right) \tan\left\{\frac{a—b}{2}\right\}$$

सारणिक लघुगुणक गणना

	(C)	(t)
$\frac{1}{2}(A+B)=53°40'25''$		$L\sin=9.90614$
$\frac{1}{2}(A-B)=10°\,91'35''$	$L\cot=.73947$	$L\operatorname{cosec}=.74695$
$\frac{1}{2}(a+b)=44°30'$	$L\operatorname{cosec}=.15434$	
$\frac{1}{2}(a-b)=7°30'$	$L\sin=9.11570$	$L\tan=9.11943$
$\therefore \frac{C}{2}=45°37'38''$	$L\tan=.00951$	
या, $C=910'15'16''$		
$\frac{c}{2}=30°38'11''$		$L\tan=9.77252$
या, $c=61°16'22''$		

3 जाँच के लिए निम्नलिखित डेलाम्बर सादृश्यता का उपयोग करेंगे,

$$\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\sin\frac{c}{2}=\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\frac{C}{2}$$

सारणिक लघुगुणक गणना

$\frac{1}{2}(A-B)=10°19'35''$	$L\sin=9.25344$	
$\frac{1}{2}c=30°38'11''$	$L\sin=9.70721$	
$\frac{1}{2}(a-b)=7°30'$		$L\sin=9.11570$
$\frac{C}{2}=45°37'38''$	8.96065	$L\cos=9.84470$ 8.96040

जाँच गणना की अन्तिम पंक्ति से स्पष्ट है कि गणना द्वारा प्राप्त मान ठीक हैं । अतः

उत्तर $B=43°20'50''$, $C=91°15'16''$, $c=61°16'22''$

उदाहरण 4. त्रिभुज ABC का निर्धारण करो जिसमें

$$b=81°42'18'',\ c=52°19'48'',\ C=47°\ 25'6''$$

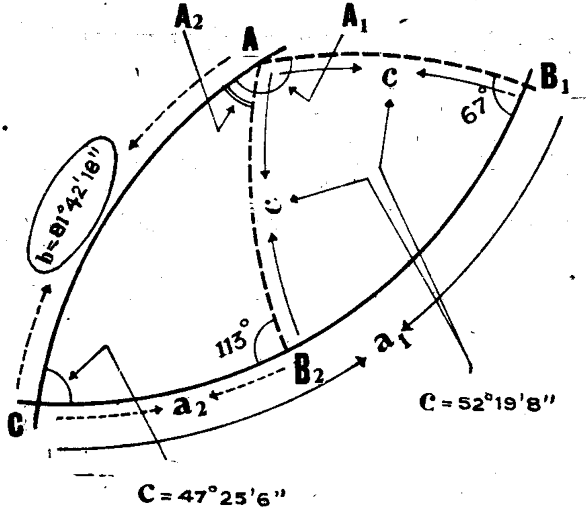
क्रिया 1. B की गणना के लिए, साइन सूत्र,

$$\sin B=\sin b \operatorname{cosec} c \sin C$$

सारणिक लघुगुणक गणना

$b=81°42'18''$	$L \sin=9.99544$
$c=52°19'8''$	$L \operatorname{cosec}=0.10153$
$C=47°25'6''$	$L \sin=9.86706$
$B_1=67°$ या, $B_2=113°$	$L\sin=9.96403$

चूंकि $b>c$ दिया है और गणना द्वारा प्राप्त दोनों मानों में $B>C$, इसलिए B के दोनों मानों के लिए दो त्रिभुज सम्भव हैं ।



आकृति 76

दिये हुए अवयवों और B के दो मानों के लिए, आकृति 76 में दर्शाये अनुसार, दो त्रिभुज AB_1C और AB_2C सम्भव हैं। अतः B_1 और B_2 मानों के लिए a और A के मान पृथक-पृथक प्राप्त करना पड़ेगा।

2. a और A के लिए, B के मान और नैपियर सादृश्यताओं से,

$$\cot\frac{A}{2}=\sin\left\{\frac{b+c}{2}\right\}\operatorname{cosec}\left\{\frac{b-c}{2}\right\}\tan\left\{\frac{B-C}{2}\right\}$$

और $$\tan\frac{a}{2}=\sin\left\{\frac{B+C}{2}\right\}\operatorname{cosec}\left\{\frac{B-C}{2}\right\}\tan\left\{\frac{b-c}{2}\right\}$$

मान लो B_1 और और B_2 के लिए a और A के मान क्रमशः a_1, A_1 तथा a_2, A_2 हैं।

a_1 और A_1 तथा a_2 और A_2 के लिए सारणिक लघुगुणक गणना।
(सारणी पृष्ठ 215 पर देखिये।)

जाँच के लिए दलाम्ब्र सादृश्यता से,(सारणी पृष्ठ 216 पर देखिये)

$$\sin\tfrac{1}{2}(B-C)\sin\tfrac{1}{2}a=\sin\tfrac{1}{2}(b-c)\cos\tfrac{1}{2}A$$

अतः उपर्युक्त सारणी से स्पष्ट है कि B_1 और B_2 मानों के लिए गणना से प्राप्त a_1, A_1 और a_2, A_2 के मान जाँच सूत्र को सन्तुष्ट करते हैं।

उत्तर—

$$\begin{cases} B\ 67^\circ, & a\ 104^\circ41', \quad A\ 115^\circ51'48'' \\ B\ 113^\circ, & a\ 50^\circ59'36'', \quad A\ 46^\circ17'36'' \end{cases}$$

सारणिक लघुगुणक गणना [$(a_1 A_1)$ और $(a_2 A_2)$ के लिए]

	(a_1)	(A_1)	(a_2)	(A_2)
$\frac{1}{2}(B_1+C)=57°12'36''$	$L \sin=9.92462$			
$\frac{1}{2}(B_1-C)=9°47'24''$		$L \tan=9.23691$		
$\frac{1}{2}(b+c)=67°1'$	$L \operatorname{cosec}=.76946$	$L \sin=9.96408$		$L \sin=9.96408$
$\frac{1}{2}(b-c)=14°41'12''$	$L \tan=9.41846$	$L \operatorname{cosec}=.59596$	$L \tan=9.41846$	$L \operatorname{cosec}=.59596$
$\frac{1}{2}a_1=52°20'30''$ $\therefore\ a_1=104°41'$	$L \tan=.11254$			
$\frac{1}{2}A_1=57°55'54''$ $\therefore\ A_1=115°51'48''$		$L \cot=9.79695$		
$\frac{1}{2}(B_2+c)=80°12'36''$			$L \sin=9.99363$	
$\frac{1}{2}(B_2-C)=32°47'24''$			$L \operatorname{cosec}=.26635$	$L \tan=9.80903$
$\frac{1}{2}a_2=25°29'48''$ $\therefore\ a_2=50°59'36''$			$L \tan=9.67844$	
$\frac{1}{2}A_2=23°8'48''$ $\therefore\ A_2=46°17'36''$				$L \cot=.36907$

सारणिक लघुगुणक गणना

$\frac{1}{2}(B_1-C)=9°47'24''$	$L \sin = 9.23054$	$\frac{1}{2}(b-c)=14°41'13''$	$L \sin = 9.40404$
$\frac{1}{2}a_1=52°20'30''$	$L \sin = 9.89854$	$\frac{1}{2}A_1=57°55'54''$	$L \cos = 9.72509$
	9.12908		$= 9.12908$
$\frac{1}{2}(B_2-C)=32°47'24''$	$L \sin = 9.73365$	$\frac{1}{2}(b-c)=14°41'12''$	$L \sin = 9.40404$
$\frac{1}{2}a_2=25°29'48''$	$L \sin = 9.63393$	$\frac{1}{2}A_2=23°8'48''$	$L \cos = 9.96355$
	9.36758		9.36759

प्रश्न संग्रह 10

निम्नलिखित तिर्यक त्रिभुजों का निर्धारण करो।

1. $a=126^\circ29'36''$, $b=128^\circ1'36''$, $c=30^\circ46'36''$
2. $a=27^\circ33'$, $b=62^\circ40'$, $c=85^\circ21'$
3. $A=128^\circ$, $B=108^\circ$, $C=135^\circ$
4. $A=71^\circ2'18''$, $B=119^\circ25'12''$, $C=60^\circ45'36''$
5. $a=83^\circ47'$, $c=125^\circ23'$, $B=105^\circ34'$
6. $b=90^\circ$, $c=47^\circ2'$, $A=34^\circ37'$
7. $A=47^\circ13'18''$, $B=120^\circ9'54''$, $c=123^\circ31'36''$
8. $B=47^\circ15'$, $C=139^\circ33'$, $a=117^\circ48'$
9. $a=80^\circ5'18'$, $b=82^\circ4'$, $A=83^\circ34'12''$
10. $b=37^\circ47'12''$, $c=103^\circ1'24''$, $B=24^\circ25'36''$
11. $A=32^\circ35'$, $B=44^\circ17'$, $a=39^\circ52'$
12. $A=96^\circ12'48''$, $C=45^\circ34'24''$, $c=27^\circ20'18''$

उत्तर—

1. $A=99^\circ20'54''$, $B=104^\circ47'42''$, $C=38^\circ54'24''$
2. $A=16^\circ24'30''$, $B=32^\circ50'30''$, $C=142^\circ31'$
3. $a=126^\circ12'$, $b=76^\circ54'$, $c=133^\circ36'$
4. $a=83^\circ35'24''$, $b=113^\circ45'48''$, $c=66^\circ28'$
5. $A=93^\circ57'$, $C=125^\circ6'$, $b=106^\circ16'$
6. $a=52^\circ58'30''$, $B=134^\circ38'$, $C=31^\circ23''$
7. $a=37^\circ43'42''$, $b=133^\circ52'54''$, $C=90^\circ31'48''$
8. $b=42^\circ49'$, $c=143^\circ6'$, $A=72^\circ53''$
9. $c_1=52^\circ27'12''$ $B_1=87^\circ34''30'$
   $c_2=25^\circ12'$ $B_2=92^\circ25'30''$
   $C_1=53^\circ6'36''$
   $C_2=25^\circ26'12''$

10. $a_1 = 73°58'$ $A_1 = 40°26'24''$
$a_2 = 134°32'36''$ $A_2 = 151°14'48''$
$C_1 = 138°53'12''$
$C_2 = 41°6'48''$

11. $b_1 = 123°47'30''$ $c_1 = 159°20'$
$b_2 = 56°12'30''$ $c_2 = 82°25'$

$C_1 = 162°45'$

$C_2 = 123°37'$

12. $a_1 = 140°15'42''$ $B_1 = 121°7'36''$
$a_2 = 39°44'18''$ $B_2 = 44°53'48''$
$b_1 = 146°36'$
$b_2 = 26°59'36''$

अध्याय 7

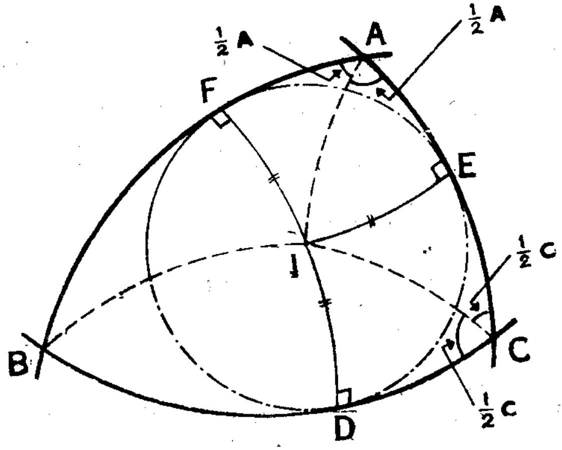
अन्तर्गत वृत्त और परिवृत्त

(INSCRIBED AND CIRCUMSCRIBED CIRCLES)

7·1. अन्तर्गत वृत्त (Inscribed Circle)

परिभाषा **18.** गोलीय त्रिभुज का अन्तर्गत वृत्त वह लघु वृत्त होता है जो त्रिभुज की तीनों भुजाओं को स्पर्श करता है।

7·1.1. गोलीय त्रिभुज के अन्तर्गत वृत्त की गोलीय त्रिज्या ज्ञात करना।



आकृति 77

मान लो *ABC* एक गोलीय त्रिभुज है। शीर्ष बिन्दु *A* और *C* के कोणों के अर्धक चाप खींचो जो बिन्दु *I* पर एक दूसरे को काटते हैं। अर्थात

$$\angle IAB = \angle IAC, \text{ इत्यादि} \tag{i}$$

बिन्दु *I* से त्रिभुज की भुजाओं के लम्बरूप चाप खींचो जो उनको क्रमशः *D*, *E* और *F* बिन्दुओं में काटते हैं।

अर्थात $\angle IEA = \angle IFA = \frac{\pi}{2}$, इत्यादि (ii)

अब, गोलीय त्रिभुज IEA और IFA में

$$\angle IAB = \angle IAC = A/2 \quad \because \text{(i)}$$

$$\angle IEA = \angle IFA = \pi/2 \quad \because \text{(ii)}$$

और, भुजा IA, उभयनिष्ठ

$\therefore$ त्रिभुज सममिततः बराबर हैं। $\because$ धारा (3·4.1)

$\therefore$ भुजा $IE =$ भुजा IF . . . (iii)

इसी प्रकार, गोलीय त्रिभुज IEC और IDC सममिततः बराबर हैं,

$\therefore$ भुजा $IE =$ भुजा ID . . . (iv)

(iii) और (iv) से,

$$IE = IF = ID \quad . \; . \; . \quad \text{(v)}$$

अब, IB को मिलाया। त्रिभुज IBF और त्रिभुज IBD में,

$\angle F = \angle D$ $\because$ प्रत्येक $= 90°$, रचना से।

भुजा $IF =$ भुजा ID $\because$ (v)

और, IB उभयनिष्ठ

$\therefore$ त्रिभुज सममिततः बराबर हैं।

$\therefore$ $\angle IBF = \angle IBD = \frac{1}{2}B$

अर्थात, बिन्दु I त्रिभुज ABC के शीर्ष कोणों के अर्धक चापों का कटन बिन्दु है। अतः त्रिभुज ABC के शीर्ष कोणों के अर्धक चाप एक-बिन्दुगामी होते हैं और इस बिन्दु I से त्रिभुज की भुजाओं के लम्बरूप खींचे गये चाप परस्पर लम्बाई में बराबर हैं। अर्थात, I बिन्दु D, E और F बिन्दुओं से होकर जाने वाले लघुवृत्त का ध्रुव है। वृत्त DEF, भुजा BC को D बिन्दु पर स्पर्श करता है क्योंकि चाप ID से होकर जाने वाले समतल में, बिन्दु D से उस पर खींचा गया लम्ब, वृत्त DEC और भुजा BC की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा है। इसी प्रकार वृत्त DEF भुजा CA और AB को भी क्रमशः E और F बिन्दुओं पर स्पर्श करता है।

अतः धारा (7·1) की परिभाषा से, वृत्त DEF त्रिभुज ABC का अन्तर्गत वृत्त है। बिन्दु I उसका ध्रुव या अन्त : केन्द्र (In centre) और चाप $ID=r$ (मान लो), उसकी गोलीय त्रिज्या कहलाती है।

हम स्थापित कर चुके हैं कि

$\triangle IEC$ और $\triangle IDC$ सममितत: बराबर हैं।

$$\therefore \quad CE=DC$$

इसी प्रकार, $$AF=EA$$

और, $$BF=BD$$

$$\therefore \quad (BD+DC)+AF=\tfrac{1}{2}\ (\text{त्रिभुज की भुजाओं का योग})$$

या, $$a+AF=s$$

$$\therefore \quad AF=s-a \qquad \ldots\ . \quad \text{(vi)}$$

समकोण गोलीय त्रिभुज IFA, $F=90°$ में, AF को मध्यभाग मान कर नैपियर प्रथम नियम से,

$$\sin AF=\tan IF \tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \tan IF=\tan \tfrac{1}{2}A \sin(s-a) \qquad \because \text{(vi)}$$

या, $$\boxed{\tan r=\tan \tfrac{1}{2}A \sin(s-a)} \qquad \ldots\ . \quad (1)$$

a, b, c और A, B, C को चक्रीय क्रम में बदलने से, $\tan r$ के निम्नलिखित दो और मान ज्ञात किये जा सकते हैं।

$$\tan r=\tan \tfrac{1}{2}B \sin(s-b)$$

और, $$\tan r=\tan \tfrac{1}{2}C \sin(s-c)$$

7·1.2. tan r के मानों के विभिन्न रूप

(अ) अर्धकोण सूत्र {धारा (4·6), 10} से,

$$\tan \tfrac{1}{2}A=\sqrt{\left(\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}\right)}$$

$$\therefore \quad \tan r = \sqrt{\left\{\left(\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\,(s-a)}\right)\right\}}.\sin(s-a)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}\right)}$$

अतः

$$\boxed{\tan r = \frac{n}{\sin s}} \qquad \ldots \quad (2)$$

यहाँ $\qquad n = \sqrt{\{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\}}$

(ब) $\qquad \sin(s-a) = \sin\left\{\frac{a+b+c}{2} - a\right\}$

$$= \sin\left\{\frac{b+c}{2} - \frac{a}{2}\right\}$$

दलाम्ब्र सादृश्यताओं से,

$$\frac{\sin\left(\frac{b+c}{2}\right)}{\sin\frac{a}{2}} = \frac{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}}$$

और,

$$\frac{\cos\left(\frac{b+c}{2}\right)}{\cos\frac{a}{2}} = \frac{\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$\therefore \quad \sin(s-a) = \frac{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\sin\frac{1}{2}A}\cos\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}a$$

$$- \frac{\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)}{\sin\frac{1}{2}A}\cos\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}a.$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}A}\left[\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) - \cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}A}(2\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C)$$

$$=\frac{\sin a \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C}{\sin \frac{1}{2}A}$$

सूत्र (1) में मान रखने पर,

$$\tan r=\tan \frac{1}{2}A \frac{\sin a \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C}{\sin \frac{1}{2}A}$$

या,

$$\boxed{\tan r=\frac{\sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}A} . \sin a} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

सममिति से,

$$\tan r=\frac{\sin \frac{1}{2}C \sin \frac{1}{2}A}{\cos \frac{1}{2}B} \sin b$$

और,

$$\tan r=\frac{\sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B}{\cos \frac{1}{2}C} \sin c$$

(स) सम्पूरक साइन सूत्र से,

$$\sin a=\frac{2 N}{\sin B \sin C},$$

$$N=\sqrt{(-\cos S \cos (S-A) \cos (S-B) \cos (S-C)}$$

सूत्र (3) में मान रखने से,

$$\tan r=\frac{\sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}A} \cdot \frac{2 N}{\sin B \sin C}$$

या,

$$\boxed{\tan r=\frac{N}{2 \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C}} \quad . \quad . \quad (4)$$

(द) $\cos S+\cos (S-A)+\cos (S-B)+\cos (S-C)$

$$=2 \cos \frac{1}{2}(2 S-A) \cos \frac{1}{2}A+2 \cos \frac{1}{2}(2 S-B-C) \cos \frac{1}{2}(C-B)$$

$$=2 \cos \frac{1}{2}A [\cos \frac{1}{2}(B+C)+\cos \frac{1}{2}(B-C)]$$

$$=4 \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C$$

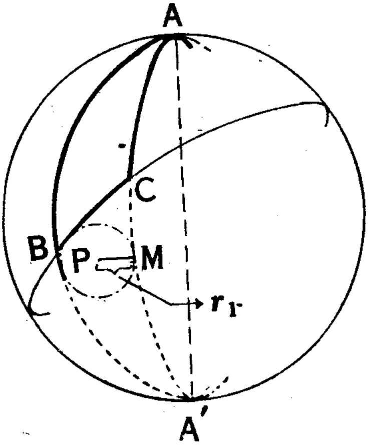
सूत्र (4) में मान रखने पर,

$$\tan r = \frac{2N}{\cos S+\cos(S-A)+\cos(S-B)+\cos(S-C)}$$

या,

$$\boxed{\cot r = \frac{\cos S+\cos(S-A)+\cos(S-B)+\cos(S-C)}{2N}} \quad \ldots \quad (5)$$

7·2. बहिर्वृत (Escribed Circles)



आकृति 78

गोलीय त्रिभुज ABC की भुजा AB और AC को बढ़ाने पर वे एक दूसरे को (मान लो) A' बिन्दु पर काटती हैं। इस प्रकार त्रिभुज $A'BC$ की रचना हुई। धारा (3·5) के अनुसार त्रिभुज $A'BC$, त्रिभुज ABC का सह-इन्दुक त्रिभुज है और इसी धारा से हम यह भी जानते हैं कि प्रत्येक गोलीय त्रिभुज के तीन सह-इंदुक त्रिभुज होते हैं। मूल त्रिभुज और उसके तीनों सह-इन्दुक त्रिभुज मिलकर सहचारी त्रिभुज (Associated Triangles) कहलाते हैं।

सह-इन्दुक त्रिभुज $A'BC$ के अन्तर्गत वृत्त को मूल त्रिभुज ABC का बहिर्वृत्त कहते हैं।

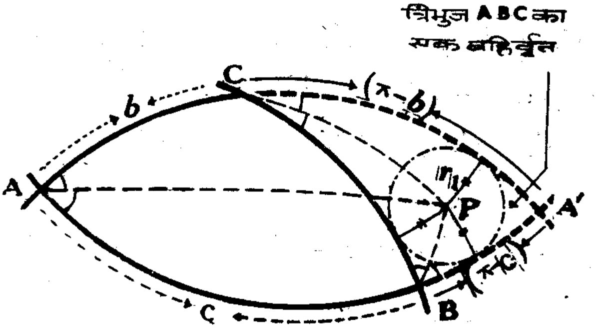
दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि,

परिभाषा 19

वह लघु वृत्त जो त्रिभुज की किसी एक भुजा और शेष दो भुजाओं के बढ़े हुए भागों को स्पर्श करता है, त्रिभुज का बहिर्वृत्त कहलाता है।

अतः प्रत्येक त्रिभुज के तीन बहिर्वृत्त होते हैं। परिपाटी के अनुसार भुजा BC को स्पर्श करने वाले बहिर्वृत्त की त्रिज्य को r_1 से और इसी प्रकार CA तथा AB को स्पर्श करने वाले बहिर्वृत्तों की त्रिज्याओं को क्रमशः r_2 और r_3 द्वारा दर्शाते हैं।

7·2.1. किसी त्रिभुज के बहिर्वृत्त की गोलीय त्रिज्या का मान ज्ञात करना।



आकृति 79

मान लो त्रिभुज ABC की भुजा AB और AC को बढ़ाने पर वे A' बिन्दु पर काटती हैं। त्रिभुज $A'BC$, त्रिभुज ABC का सह-इन्दुक त्रिभुज है जिसके अवयव क्रमशः a, $(\pi-b)$, $(\pi-c)$ और A, $(\pi-B)$, $(\pi-c)$ हैं क्योंकि इन्दुक AA' के कोण A और A' परस्पर बराबर होते हैं।

त्रिभुज $A'BC$ का अन्तर्गत वृत्त, पिछली धारा की परिभाषा के अनुसार, त्रिभुज ABC का वह बहिर्वृत्त है जो भुजा को स्पर्श करता है और जिसकी त्रिज्या हमने r_1 द्वारा दर्शायी है।

स्पष्ट है कि पिछली धाराओं के परिणाम त्रिभुज $A'BC$ के अवयवों के लिए भी सत्य हैं। अतः

$$2s_1 = \text{त्रिभुज } A'BC \text{ की भुजाओं का योग}$$

$$= a+(\pi-b)+(\pi-c)$$

$$= 2\pi+(a-b-c)$$

$$= 2\pi-2a-2s \qquad \because\ 2s=a+b+c$$

$$\therefore \quad (s_1-a)=\pi-s \qquad \ldots \text{(i)}$$

इसी प्रकार

$$s_1-(\pi-b)=s-c \qquad . \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$

और

$$s_1-(\pi-c)=s-b \qquad . \quad . \quad . \quad \text{(iii)}$$

(i), (ii) और (iii) से,

$$\begin{aligned} n_1 &= \sqrt{[(\sin s_1 \sin (s_1-a) \sin \{s_1-(\pi-b)\} \sin \{s_1-(\pi-c)\}]} \\ &= \sqrt{[\sin \{\pi-(s-a)\} \{\sin (\pi-s)\} \sin (s-c) \sin (s-b)]} \\ &= \sqrt{\{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)\}} \\ &= n \qquad . \quad . \quad . \quad \text{(iv)} \end{aligned}$$

$$\mathcal{N}_1 = \sqrt{[(-\cos S_1 \cos (S_1-A) \cos \{S_1-(\pi-B)\}} \\ \cos \{s_1-(\pi-c)\}$$

जहाँ, $2S_1=$ त्रिभुज $A'BC$ के तीनों कोणों का योग

$$=2\pi+2A-2S \qquad \because\ 2S=A+B+C$$

$$\therefore \qquad \begin{aligned} S_1-A&=\pi-S \\ S_1-(\pi-B)&=S-C \\ S_1-(\pi-C)&=S-B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1 &= \sqrt{[-\{-\cos(S-A)\}\{-\cos S\} \cos(S-C)\cos(S-B)]} \\ &= \sqrt{\{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)\}} \\ &= \mathcal{N} \end{aligned}$$

धारा (7·1.1) के सूत्र (1) से त्रिभुज $A'BC$ के अन्तर्गत वृत्त की त्रिज्या अर्थात त्रिभुज ABC के बहिर्वृत्त की त्रिज्या r_1 के लिए,

$$\begin{aligned} \tan r_1 &= \tan \tfrac{1}{2}A_1 \sin (s_1-a) \\ &= \tan \tfrac{1}{2}A \sin (\pi-s) \qquad \because\ \text{(i)} \end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \boxed{\tan r_1=\tan \tfrac{1}{2}A \sin s} \qquad . \quad . \quad . \quad (1)$$

शेष दो बहिर्वृत्तों के लिए, सममिति से,

$$\tan r_2 = \tan \tfrac{1}{2}B \sin s$$

$$\tan r_3 = \tan \tfrac{1}{2}C \sin s$$

7·2.2. धारा (7·1.2) में स्थापित $\tan r$ के सूत्रों के संगत $\tan r_1$, $\tan r_2$ और $\tan r_3$ के लिए सूत्र

$$\tan r_1 = \frac{n_1}{\sin s_1}$$

$$= \frac{n}{\sin\{\pi-(s-a)\}}$$

$$\therefore \qquad \boxed{\tan r_1 = \frac{n}{\sin(s-a)}} \qquad \cdots \quad (2)$$

$$\tan r_1 = \frac{\sin \frac{1}{2}(\pi-B) \sin \frac{1}{2}(\pi-C)}{\cos \frac{1}{2}A} \sin a$$

या,

$$\boxed{\tan r_1 = \frac{\cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C}{\mathrm{ccs} \frac{1}{2}A} \sin a} \qquad \cdots \quad (3)$$

$$\tan r_1 = \frac{N_1}{2 \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}(\pi-B) \cos \frac{1}{2}(\pi-C)}$$

या,

$$\boxed{\tan r_1 = \frac{N}{2 \cos \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C}} \qquad \cdots \quad (4)$$

इसी प्रकार,

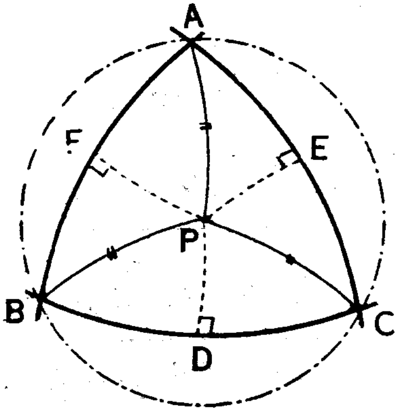
$$\boxed{\cot r_1 = \frac{-\cos S-\cos(S-A)+\cos(S+B)+\cos(S-C)}{2N}} \qquad \cdots \quad (5)$$

टिप्पणी—r_2 और r_3 के लिए संगत सूत्र सममिति से ज्ञात किये जा सकते हैं।

7·3. परिवृत्त (Circumscribed Circle)

परिभाषा 20. लघु वृत्त जो किसी गोलीय त्रिभुज के तीनों शीर्ष बिन्दुओं से होकर जाता है उस त्रिभुज का परिवृत्त कहलाता है।

7·3.1. गोलीय त्रिभुज के परिवृत्त की गोलीय त्रिज्या ज्ञात करना।



आकृति 80

मान लो, ABC दिया हुआ गोलीय त्रिभुज है। भुजा BC, CA और AB के मध्य बिन्दु D, E और F से भुजाओं के लम्ब-रूप चाप खींचो जो परस्पर P बिन्दु पर मिलते हैं। [देखो धारा (5·6) प्रमेय 14 के विलोम से स्थापित परिणाम 1] PA, PB और PC को मिलाओ।

त्रिभुज PEA और PEC में,

$$AE = CE$$

$$PE, \text{ उभयनिष्ठ}$$

और $$\angle PEC = \angle PEA$$

$\therefore$ त्रिभुज सममितत: बराबर हैं।

$$PC = PA \qquad \ldots \quad \text{(i)}$$

इसी प्रकार, त्रिभुज PDB और PDC से,

$$PB = PC \qquad \ldots \quad \text{(ii)}$$

(i) और (ii) से, $PA = PB = PC = R$ (मान लो)

अतः बिन्दु P जो त्रिभुज की भुजाओं के लम्बार्धकों का कटन बिन्दु है, को ध्रुव मानकर, R त्रिज्या लेकर खींचा गया लघु वृत्त त्रिभुज ABC के शीर्ष बिन्दुओं से होकर जायेगा और परिभाषा (धारा 7·3) से वह त्रिभुज ABC का परिवृत्त होगा। बिन्दु P परिवृत्त का केन्द्र और $PA=PB=PC=R$ उसकी गोलीय त्रिज्या कहलाती है।

हम स्थापित कर चुके हैं कि त्रिभुज PEA और PEC सममितत: बराबर हैं।

$\therefore$
$$\angle PCE = \angle PAE$$

इसी प्रकार,
$$\angle PCD = \angle PBD$$

और,
$$\angle PAF = \angle PBF$$

$\therefore$
$$(\angle PCE + \angle PAF) + \angle PCD = \tfrac{1}{2}(A+B+C)$$

या,
$$\angle A + \angle PCD = S$$

$\therefore$
$$\angle PCD = S - A \qquad \ldots \quad \text{(iii)}$$

अब समकोण गोलीय त्रिभुज PDC, $D=90°$ में $\left\{\frac{\pi}{2} - PCD\right\}$ को मध्यभाग मानकर, नैपियर प्रथम नियम से,

$$\sin\{\pi/2 - PCD\} = \tan DC \tan(\pi/2 - PC)$$

या,
$$\cos PCD = \tan DC \cot PC$$

या,
$$\cos(S-A) = \tan \tfrac{1}{2}a \cot R \qquad \because \text{(iii)}$$

या,
$$\boxed{\tan R = \frac{\tan \frac{1}{2}a}{\text{cas}\,(S-A)}} \qquad \ldots \quad (1)$$

a, b, c और A, B, C को चक्रीय क्रम में बदलने पर, $\tan R$ के दो और मान निम्न रूप में लिखे जा सकते हैं।

$$\tan R = \frac{\tan \frac{1}{2}b}{\cos(S-B)}$$

और,
$$\tan R = \frac{\tan \frac{1}{2}c}{\cos(S-C)}$$

7·3.2. tan R के मानों के विभिन्न रूप

(अ) अर्ध भुजा सूत्र {धारा (4·7), (13)} से,

$$\tan \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\left(\frac{-\cos S \cos (S-A)}{\cos (S-B) \cos (S-C)}\right)}$$

$$\therefore \qquad \tan R = \sqrt{\left(\frac{-\cos S \cos (S-A)}{\cos (S-B) \cos (S-C)} \times \frac{1}{\cos (S-A)}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-\cos S}{\cos (S-A) \cos (S-B) \cos (S-C)}\right)}$$

या,

$$\boxed{\tan R = \frac{-\cos S}{N}} \qquad \ldots \quad (2)$$

टिप्पणी—वर्गमूल के साथ ऋण चिन्ह लेना आवश्यक है क्योंकि cos S का मान ऋण और N तथा tan R के मान धन हैं।

(ब)

$$\cos (S-A) = \cos \left(\frac{B+C}{2} - \frac{A}{2}\right)$$

$$= \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{A}{2} + \sin \frac{B+C}{2} \sin \frac{A}{2}$$

दलाम्ब्र सादृश्यताओं से,

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(B+C)}{\cos \frac{1}{2}A} = \frac{\cos \frac{1}{2}(b-c)}{\cos \frac{1}{2}a}$$

और,

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(B+C)}{\sin \frac{1}{2}A} = \frac{\cos \frac{1}{2}(b+c)}{\cos \frac{1}{2}a}$$

$$\therefore \qquad \cos (S-A) \frac{\cos \frac{1}{2}(b+c)}{\cos \frac{1}{2}a} \sin \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}A + \frac{\cos \frac{1}{2}(b-c)}{\cos \frac{1}{2}a} \times \sin \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}A$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}A}{\cos \frac{1}{2}a} \{\cos \tfrac{1}{2}(b+c) + \cos \tfrac{1}{2}(b-c)\}$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}A}\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a}\sin A$$

$$\therefore \qquad \tan R=\tan\tfrac{1}{2}a\,\frac{\cos\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\sin A}$$

या,

$$\boxed{\tan R=\frac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin A\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}} \quad \ldots \quad (3)$$

(स) साइन सूत्र से,

$$\sin A=\frac{2n}{\sin b\sin c}$$

$$\therefore \qquad \tan R=\frac{\sin\frac{1}{2}a}{\left(\frac{2n}{\sin b\sin c}\right)\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

या,

$$\boxed{\tan R=\frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{n}} \quad \ldots \quad (4)$$

(द) $\sin(s-a)+\sin(s-b)+\sin(s-c)-\sin s$

$$=2\sin\left(\frac{2s-a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{b-a}{2}\right)+2\cos\left(\frac{2s-c}{2}\right)\sin\left(-\frac{c}{2}\right)$$

$$=2\sin\tfrac{1}{2}c\left[\cos\left(\frac{b-a}{2}\right)-\cos\left(\frac{b+a}{2}\right)\right]$$

$$=4\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c$$

(4) में मान रखने पर,

$$\boxed{\tan R=\frac{\sin(s-a)+\sin(s-b)+\sin(s-c)-\sin s}{2n}}$$

$$\ldots \quad (5)$$

7·4. सह-इंदुक त्रिभुजों के परिवृत्त

मान लो ABC एक गोलीय त्रिभुज है और $A'BC$ उसका एक सह-इंदुक त्रिभुज है (इसे भुजा BC पर बना सह-इंदुक त्रिभुज भी कह सकते हैं)। a, $(\pi-b)$, $(\pi-c)$ और A, $(\pi-B)$, $(\pi-C)$, त्रिभुज $A'BC$ के अवयव हैं। मान लो R_1 सह-इंदुक $A'BC$ के परिगत वृत्त की त्रिज्या है।

धारा (7·3.1) के सूत्र (1) से,

$$\tan R_1=\frac{\tan\frac{1}{2}a}{\cos(S_1-A)}$$

$$=\frac{\tan\frac{1}{2}a}{\cos(\pi-S)} \qquad \because \text{ धारा } (7·2.1)$$

या,

$$\boxed{\tan R_1=-\frac{\tan\frac{1}{2}a}{\cos S}} \qquad \ldots \quad (1)$$

सममिति से, शेष दो सह-इंदुक त्रिभुजों के परिवृत्तों के लिए,

$$\tan R_2=\frac{-\tan\frac{1}{2}b}{\cos S}$$

और,

$$\tan R_3=\frac{-\tan\frac{1}{2}c}{\cos S}$$

7·4.1. धारा (7·3.2) में स्थापित $\tan R$ के सूत्रों के संगत $\tan R_1$, $\tan R_2$ और $\tan R_3$ के लिए सूत्र

$$\tan R_1=\frac{-\cos S_1}{N_1}$$

$$=\frac{-\cos\{\pi-(S-A)\}}{N_1} \qquad \because \text{ धारा } (7·2.1)$$

या,

$$\boxed{\tan R_1=\frac{\cos(S-A)}{N}} \qquad \ldots \quad (2)$$

$$\tan R_1=\frac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin A\cos\frac{1}{2}(\pi-b)\cos\frac{1}{2}(\pi-c)}$$

या,

$$\boxed{\tan R_1=\frac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin A\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}}\quad\ldots\quad(3)$$

$$\tan R_1=\frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}(\pi-b)\sin\frac{1}{2}(\pi-c)}{n_1}$$

या,

$$\boxed{\tan R=\frac{2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{n}}\quad\ldots\quad(4)$$

अंत में, ∵ धारा (7·2.1)

$$\boxed{\tan R_1=\frac{\begin{array}{r}\sin(s_1-a)+\sin\{s_1-(\pi-b)\}\\ +\sin\{s_1-(\pi-c)\}-\sin s_1\end{array}}{2n_1}}$$

या,

$$\boxed{\tan R_1=\frac{\sin s-\sin(s-a)+\sin(s-b)+\sin(s-c)}{2n}}\quad\ldots\quad(5)$$

7·5. ध्रुवीय त्रिभुज के अन्तर्गत वृत्त और परिवृत्त

मान लो त्रिभुज $A'B'C'$, त्रिभुज ABC का ध्रुवीय त्रिभुज है। चूंकि त्रिभुज ABC का अन्तः केन्द्र I त्रिभुज की तीनों भुजाओं से समान लम्ब दूरी पर है इसलिए उनके ध्रुवों तथा A', B' और C' से भी समान दूरी पर है। इसलिए,

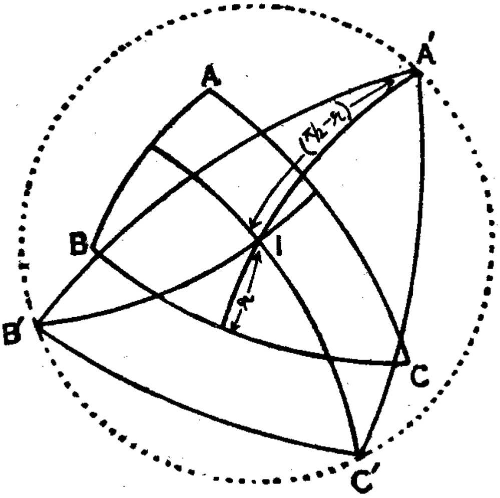
$$IA'=IB'=IC'=(\pi/2-r)$$

जब कि r, त्रिभुज ABC के अंतर्गत वृत्त की त्रिज्या है।

अतः बिन्दु I को ध्रुव मानकर, IA' या $(\pi/2-r)$ के बराबर त्रिज्या लेकर, खींचा गया लघु वृत्त B' और C' में से होकर जायेगा। धारा (7·3) की परिभाषा से यह वृत्त ध्रुवीय त्रिभुज $A'B'C'$ का परिगत वृत्त है।

उपर्युक्त परिणाम को हम निम्नलिखित रूप में भी प्रतिपादित कर सकते हैं।

किसी गोलीय त्रिभुज के अन्तर्गत वृत्त का ध्रुव (केन्द्र) उसके ध्रुवीय त्रिभुज के परिवृत्त का भी ध्रुव (केन्द्र) होता है और त्रिभुज के अन्तर्गत वृत्त की त्रिज्या उसके ध्रुवीय त्रिभुज के परिवृत्त की त्रिज्या की अनुपूरक होती है।



आकृति 81

धारा (3·7.2) के प्रमेय 12 से यदि $A'B'C'$, गोलीय त्रिभुज ABC का ध्रुवीय त्रिभुज है तो ABC, गोलीय त्रिभुज $A'B'C'$ का ध्रुवीय त्रिभुज होता है। अतः पिछली धारा के परिणाम को निम्नलिखित रूप में भी प्रतिपादित कर सकते हैं।

किसी गोलीय त्रिभुज के परिवृत्त का केन्द्र (ध्रुव) उसके ध्रुवीय त्रिभुज के अन्तर्गत वृत्त का भी केन्द्र (ध्रुव) होता है और त्रिभुज के परिवृत्त की त्रिज्या उसके ध्रुवीय त्रिभुज के अन्तर्गत वृत्त की त्रिज्या की अनुपूरक होती है।

सूत्रसारणी 2. अंतर्गत और परिगत वृत्तों की त्रिज्या के सूत्रों की सारणी

क्रमांक	$\tan r_1$	$\tan r_1$	$\tan R$	$\tan R_1$	
1.	$\tan \frac{1}{2}A \sin(s-a)$	$\tan \frac{1}{2}A \sin s$	$\frac{\tan \frac{1}{2}a}{\cos(S-A)}$	$\frac{\tan \frac{1}{2}a}{-\cos S}$	
2.	$\frac{n}{\sin s}$	$\frac{\cos n}{\sin(s-a)}$	$\frac{-\cos S}{N}$	$\frac{\cos(S-A)}{N}$	
3.	$\left(\frac{\sin\frac{1}{2}B \sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A}\right)\sin a$	$\frac{\cos\frac{1}{2}B \cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A} \sin a$	$\frac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin A \cos\frac{1}{2}b \cos\frac{1}{2}c}$	$\frac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin a \sin\frac{1}{2}b \sin\frac{1}{2}c}$	
4.	$\frac{N}{2\cos\frac{1}{2}A \cos\frac{1}{2}B \cos\frac{1}{2}C}$	$\frac{N}{2\cos\frac{1}{2}A \sin\frac{1}{2}B \sin\frac{1}{2}C}$	$\frac{2\sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}b \sin\frac{1}{2}c}{n}$	$\frac{2\sin\frac{1}{2}a \cos\frac{1}{2}b \cos\frac{1}{2}c}{n}$	
5.	$\frac{2n}{\{\cos S+\cos(S-A) \cos(S-B)+\cos(S-C)\}}$	$\frac{2n}{\{-\cos S-\cos(S-A)\cos(S-B)+\cos(S-C)\}}$	$\frac{\{\sin(s-a)+\sin(s-b)\sin(s-c)-\sin s\}}{2n}$	$\frac{\{\sin s-\sin(s-a)\sin(s-b)+\sin(s-c)}{2n}$	

$$n^2 = \sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)$$
$$N^2 = -\cos S \cos(S-A) \cos(S-B) \cos(S-C)$$

7·6. विविध उदाहरण

उदाहरण 1. सिद्ध करो कि

$$\cot r \sin s = \cot \tfrac{1}{2}A \cot \tfrac{1}{2}B \cot \tfrac{1}{2}C$$

अर्ध-कोण सूत्रों से मान रखने पर

$$\text{दाहिना पक्ष} = \sqrt{\left(\frac{\sin s \sin (s-a)}{\sin (s-b) \sin (s-c)}\right)}\sqrt{\left(\frac{\sin s \sin (s-b)}{\sin (s-a) \sin (s-c)}\right)} \times \sqrt{\left(\frac{\sin s \sin (s-c)}{\sin (s-a) \sin (s-b)}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sin^3 s}{\sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sin^4 s}{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin(s-c)}\right)}$$

$$= \frac{\sin^2 s}{n}$$

$$= \left(\frac{\sin s}{n}\right) \sin s$$

$$= \cot r \sin s.$$ ∵ धारा (7.1.2) सूत्र (2),

उदाहरण 2. सिद्ध करो कि,

$$\frac{\tan r \tan r_1}{\tan r_2 \tan r_3} = \tan^2 \tfrac{1}{2} A$$

वाम पक्ष में सारणी से मान रखने पर,

$$\text{वाम पक्ष} = \frac{\tan \tfrac{1}{2}A \sin (s-a) \,.\, \tan \tfrac{1}{2}A \sin s}{\dfrac{n}{\sin (s-b)} \times \dfrac{n}{\sin (s-c)}}$$

$$= \frac{\tan^2 \tfrac{1}{2}A \{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)\}}{n^2}$$

$$= \tan^2 \tfrac{1}{2}A.$$

उदाहरण 3. सिद्ध करो कि,

$$(\cot r+\tan R)^2 = \frac{(\sin a+\sin b+\sin c)^2}{4n^2}-1$$

सारणी से मान रखने पर,

$$\cot r+\tan R=\frac{\sin s}{n}+\frac{\sin(s-a)+\sin(s-b)+\sin(s-c)-\sin s}{2n}$$

$$=\frac{\sin s+\sin(s-a)+\sin(s-b)+\sin(s-c)}{2n}$$

$$=\frac{1}{2n}[2\sin\tfrac{1}{2}(b+c)\cos\tfrac{1}{2}a+2\cos\tfrac{1}{2}(b-c)\sin\tfrac{1}{2}a]$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$(\cot r+\tan R)^2=\text{वाम पक्ष}$$

$$=\frac{1}{4n^2}[\{1-\cos(b+c)\}(1+\cos a)+2\sin a(\sin b+$$
$$\sin c)+(1-\cos a)\{1+\cos(b+c)\}]$$

$$=\frac{1}{4n^2}[2-2\cos a\cos b\cos c+2\sin b\sin c+$$
$$2\sin c\sin a+2\sin a\sin b] \quad . \; . \quad (1)$$

और, दाहिना पक्ष

$$=\frac{1}{4n^2}\{(\sin a+\sin b+\sin c)^2-4n^2\}$$

$$=\frac{1}{4n^2}\{(\sin a+\sin b+\sin c)^2-$$
$$(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c)\}$$

∵ धारा (4·4)

$$=\frac{1}{4n^2}\{2-2\cos a\cos b\cos c+2\sin b\sin c$$
$$+2\sin c\sin a-2\sin a\sin b\} \quad . \; . \quad (2)$$

अतः (1) और (2) से अभीष्ट परिणाम सिद्ध होता है।

उदाहरण 4. सिद्ध करो कि,

$$\tan r_1 \tan r_2 \tan r_3 = \tan r \sin^2 s$$

सारणी से मान रखने पर,

$$\text{वाम पक्ष} = \frac{n}{\sin(s-a)} \cdot \frac{n}{\sin(s-b)} \cdot \frac{n}{\sin(s-c)}$$

$$= \frac{n\{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\}}{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}$$

$$= n.\sin s$$

$$= \left(\frac{n}{\sin s}\right).\sin^2 s$$

$$= \tan r.\sin^2 s$$

उदाहरण 5. सिद्ध करो कि,

$$\tan r_1 + \tan r_2 + \tan r_3 - \tan r = \tan R(1+\cos a+\cos b+\cos c)$$

सारणी से मान रखने पर,

$$(\tan r_1 + \tan r_2) + (\tan r_3 - \tan r)$$

$$= \left\{\frac{n}{\sin(s-a)} + \frac{n}{\sin(s-b)}\right\} + \left\{\frac{n}{\sin(s-c)} - \frac{n}{\sin s}\right\}$$

$$= \frac{n\{\sin(s-b)+\sin(s-a)\}}{\sin(s-a)\sin(s-b)} + \frac{n\{\sin s - \sin(s-c)\}}{\sin s \sin(s-c)}$$

$$= \frac{2n\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin(s-a)\sin(s-b)} + \frac{2n\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\sin s\sin(s-c)}$$

$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}c\,[\cos\frac{1}{2}(a-b)\sin s\sin(s-c) + \cos\frac{1}{2}(a+b)\sin(s-a)\sin(s-b)]}{n}$$

$$\text{अंश} = \sin\tfrac{1}{2}c\,[\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\{2\sin s\sin(s-c)\} + \cos\tfrac{1}{2}(a+b) \times \{2\sin(s-a)\sin(s-b)\}]$$

$$=\sin\tfrac{1}{2}c\,[\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\{\cos c-\cos(a+b)\}+\cos\tfrac{1}{2}(a+b)$$
$$+\{\cos(a-b)-\cos c\}$$

$$=\sin\tfrac{1}{2}c\,[\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\{\cos c-2\cos^2\tfrac{1}{2}(a+b)+1\}$$
$$+\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\{2\cos^2\tfrac{1}{2}(a-b)-1-\cos c\}]$$

$$=\sin\tfrac{1}{2}c\,[(1+\cos c)\{\cos\tfrac{1}{2}(a-b)-\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\}$$
$$-2\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\cos^2\tfrac{1}{2}(a+b)+2\cos^2\tfrac{1}{2}(a-b)$$
$$\times\cos\tfrac{1}{2}(a+b)]$$

$$=\sin\tfrac{1}{2}c\,[(1+\cos a)\{\cos\tfrac{1}{2}(a-b)-\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\}$$
$$+2\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\{\cos\tfrac{1}{2}(a-b)-\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\}]$$

$$=\sin\tfrac{1}{2}c\,[\{\cos\tfrac{1}{2}(a-b)-\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\}\{1+\cos c$$
$$+2\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\times\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\}]$$

$$=\sin\tfrac{1}{2}c\left[\left\{2\sin\frac{b}{2}\sin\frac{a}{2}\right\}(1+\cos c+\cos a+\cos b)\right]$$

$$\therefore\qquad \tan r_1+\tan r_2+\tan r_3-\tan r$$
$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}a\,(1+\cos a+\cos b+\cos c)}{n}$$
$$=\tan R\,(1+\cos a+\cos b+\cos c)$$

उदाहरण 6. सिद्ध करो कि,

$$\operatorname{cosec}^2 r_1=\cot(s-b)\cot(s-c)-\cot s\{\cot(s-b)$$
$$+\cot(s-c)\}$$

दाहिने पक्ष में,

$$\cot s\{\cot(s-b)+\cot(s-c)\}=\cot s\left\{\frac{\cos(s-b)}{\sin(s-b)}+\frac{\cos(s-c)}{\sin(s-c)}\right\}$$
$$=\cot s\left\{\frac{\sin(s-c)\cos(s-b)+\cos(s-c)\sin(s-b)}{\sin(s-b)\sin(s-c)}\right\}$$
$$=\frac{\cos s\sin(2s-b-c)}{\sin s\sin(s-b)\sin(s-c)}$$

$$=\frac{\cos s \sin a}{\sin s \sin(s-b) \sin(s-c)}$$

और, $\cot(s-b)\cot(s-c)-1=$

$$\frac{\cos(s-b)\cos(s-c)-\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin(s-b)\sin(s-c)}$$

$$=\frac{\cos(2s-b-c)}{\sin(s-b)\sin(s-c)}=\frac{\cos a}{\sin(s-b)\sin(s-c)}$$

$$\therefore\ \{\cot(s-b)\cot(s-c)-1\}-\{\cot s\cot(s-b)+\cot s\cot(s-c)\}$$

$$=\frac{\cos a}{\sin(s-b)\sin(s-c)}-\frac{\cos s\sin a}{\sin s\sin(s-b)\sin(s-c)}$$

$$=\frac{\sin s\cos a-\cos s\sin a}{\sin s\sin(s-b)\sin(s-c)}$$

$$=\frac{\sin(s-a)}{\sin s\sin(s-b)\sin(s-c)}$$

$$=\frac{\sin^2(s-a)}{n^2}$$

$$=\cot^2 r_1$$

$$\therefore\ \cot(s-b)\cot(s-c)-\cot s\{\cot(s-b)+\cot(s-c)\}$$

$$=1+\cot^2 r_1$$

$$=\operatorname{cosec}^2 r_1.$$

उदाहरण **7.** बिन्दु P, समत्रिबाहु गोलीय त्रिभुज ABC के परिवृत्त का ध्रुव (केन्द्र) है। यदि Q गोले पर स्थित कोई बिन्दु है तो सिद्ध करो कि

$$\cos QA+\cos QB+\cos QC=3\cos PA\cos PQ$$

यदि त्रिभुज की प्रत्येक भुजा एक चतुर्थांश के बराबर हो तो सिद्ध करों कि

$$\cos QA+\cos QB+\cos QC=\sqrt{3}\cos PQ$$

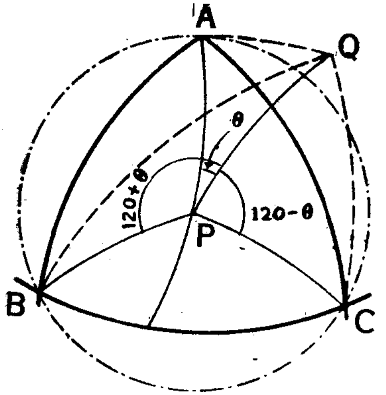
चूंकि त्रिभुज ABC समत्रिबाहु है और P उसके परिवृत्त का केन्द्र है

$$\therefore \qquad \angle BPC = \angle CPA = \angle APB = 120^\circ$$

मान लो, गोले पर स्थित Q बिन्दु, चाप PA और PC के बीच कहीं स्थित है और,

$$\angle APQ = \theta$$

अब, गोलीय त्रिभुज APQ, BPQ और CPQ में कोसाइन सूत्र से,



आकृति 82

$$\left.\begin{aligned} \cos QA &= \cos PA \cos PQ + \sin PA \sin PQ \cos\theta \\ \cos QB &= \cos PQ \cos PB + \sin PB \sin PQ \cos(120^\circ+\theta) \\ \cos QC &= \cos PC \cos PQ + \sin PC \sin PQ \cos(120^\circ-\theta) \end{aligned}\right\} \text{(i)}$$

चूँकि बिन्दु P, त्रिभुज ABC के परिवृत्त का ध्रुव है,

$$\therefore \qquad PA = PB = PC \qquad \ldots \text{(ii)}$$

और,
$$\begin{aligned} &\cos\theta + \cos(120+\theta) + \cos(120-\theta) \\ &= \cos\theta + 2\cos 120 \cos\theta \\ &= \cos\theta + 2\left(-\tfrac{1}{2}\right)\cos\theta \\ &= 0 \qquad \ldots \text{(iii)} \end{aligned}$$

(i) के परिणामों को जोड़कर (ii) और (iii) से सरल करने पर,

$$\cos QA + \cos QB + \cos QC = 3\cos PA \cos PQ$$

यदि त्रिभुज ABC समत्रिबाहु है तो इसके परिवृत्त और अन्तर्गत वृत्त का एक ही ध्रुव होगा। अतः बिन्दु P, त्रिभुज ABC के अन्तर्गत वृत्त का ध्रुव है। और चूंकि,

$$a=b=c=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad A=B=C=\frac{\pi}{2}$$

और,

$$\tan R=\tan PA=\frac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin A\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}}$$

$$=\sqrt{2}$$

$$\therefore \quad \cos R=\cos PA=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

प्रथम भाग के परिणाम में मान रखने पर,

$$\cos QA+\cos QB+\cos QC=3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cos PQ$$

$$=\sqrt{3}\cos PQ$$

प्रश्न संग्रह 11

सिद्ध करो

1. (i) $\cot r_1\sin(s-a)=\cot\frac{1}{2}A\tan\frac{1}{2}B\tan\frac{1}{2}C$

   (ii) $\tan R\cos S=-\tan\frac{1}{2}a\tan\frac{1}{2}b\tan\frac{1}{2}c$

   (iii) $\tan R_1\cos(S-A)=\tan\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b\cot\frac{1}{2}c$

2. $\tan R\tan R_1+\tan R_2\tan R_3=\cot r\cot r_1+\cot r_2\times\cot r_3$

3. $\cos A=\dfrac{\tan r_2\tan r_3-\tan r\tan r_1}{\tan r_2\tan r_3+\tan r\tan r_1}$

[संकेत—उदाहरण 2 से,

$$\frac{\tan r_2 \tan r_3}{\tan r \tan r_1}=\frac{1}{\tan^2 \frac{1}{2}A}$$

योगान्तरानुपात से अभीष्ट परिणाम प्राप्त करो।]

4. (i) $\tan R+\cot r=\tan R_1 \cot r_1=\tan R_2 \cot r_2$

$$=\tan R_3 \cot r_3$$

$$=\tfrac{1}{2}(\cot r+\cot r_1+\cot r_2+\cot r_3)$$

$$=\tfrac{1}{2}(\tan R+\tan R_1+\tan R_2+\tan R_3)$$

(ii) $\tan R_1-\tan R=\dfrac{\sin s-\sin(s-a)}{n}$

(iii) $\cot r-\cot r_1=\dfrac{\cos S+\cos(S-A)}{N}$

(iv) $(\cot r_1-\tan R)^2=\dfrac{(\sin b+\sin c-\sin a)^2}{4n^2}-1$

(v) $\tan^2 R+\tan^2 R_1+\tan^2 R_2+\tan^2 R_3$

$$=\cot^2 r+\cot^2 r_1+\cot^2 r_2+\cot^2 r_3$$

5. (i) $\tan R_1 \tan R_2 \tan R_3=\tan R \sec^2 S$

(ii) $\tan r \tan r_1 \tan r_2 \tan r_3=n^2=\dfrac{\sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A}{4}$

(iii) $\cot R \cot R_1 \cot R_2=N^2\times\cot R_3$

6. (i) $\cot r_1+\cot r_2+\cot r_3-\cot r=2\tan R$

(ii) $\cot R_1+\cot R_2+\cot R_3-\cot R=2\tan r$

(iii) $\dfrac{\tan r_1+\tan r_2+\tan r_3-\tan r}{\cot r_1+\cot r_2+\cot r_3-\cot r}=$

$$\tfrac{1}{2}(1+\cos a+\cos b+\cos c)$$

7. (i) $\tan r \cot R=\dfrac{\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}$

(ii) $\tan R \cot r = \dfrac{2 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}{\sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}$

8. सिद्ध करो कि समत्रिबाहु गोलीय त्रिभुज में,

$$\tan R = 2 \tan r$$

9. समकोण गोलीय त्रिभुज $ABC, A=\frac{\pi}{2}$ में सिद्ध करो कि,

$$\tan R = \frac{\sin \frac{1}{2}a}{\cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}$$

10. यदि गोलीय त्रिभुज ABC की भुजाओं का योग अर्धवृत्त की परिधि के बराबर है तो सिद्ध करो कि,

$$\tan^2 r = \cos a \cos b \cos c$$

11. गोलीय त्रिभुज ABC के परिवृत्त का ध्रुव P है। यदि चाप PD, बिन्दु P से भुजा BC पर लम्ब दर्शाता है तो सिद्ध करो कि

$$\sin PD = \sin R \sin (S-A)$$

12. यदि बिन्दु P, गोलीय त्रिभुज ABC के परिवृत्त का ध्रुव है तो सिद्ध करो कि

$$\cos \tfrac{1}{2}BPC = \sin \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}c + \cos \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}c \cos A$$

उपर्युक्त परिणाम से निगमित करो कि चाप PB और PC के बीच का कोण जीवा AB और AC के बीच के कोण का दुगना है।

13. यदि बिन्दु I, गोलीय त्रिभुज ABC के अन्तर्गत वृत्त का ध्रुव है तो

$$\cos BIC = \frac{\cos A - \cos B - \cos C - 1}{4 \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C}$$

14. सिद्ध करो कि

$$\Sigma\{\sin a \sin (S-A)\} = 2n (\tan R + \cot R)$$

15. गोलीय त्रिभुज ABC के परिवृत्त के ध्रुव की भुजाओं BC, CA और AB से गोलीय दूरियाँ क्रमशः α, β और γ हैं। सिद्ध करो कि

(i) $\tan \alpha = \dfrac{\sin \frac{1}{2}a}{2n}(1+\cos a - \cos b - \cos c)$

(ii) $\dfrac{\tan \alpha}{\sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c} + \dfrac{\tan \beta}{\sin \frac{1}{2}c \sin \frac{1}{2}a} + \dfrac{\tan \gamma}{\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b}$

$$= \frac{4}{\sin^2 R}$$

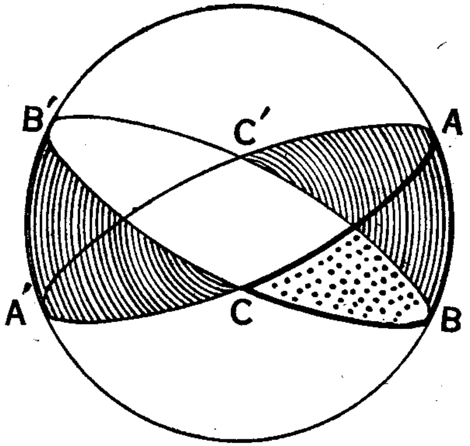
अध्याय 8

गोलीय त्रिभुज का क्षेत्रफल और गोलीय आधिक्य

(AREA OF A SPHERICAL TRIANGLE AND SPHERICAL EXCESS)

8·1. गोलीय त्रिभुज का क्षेत्रफल

मान लो चिन्ह $\triangle$, गोलीय त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल दर्शाता है। A', B', C' क्रमशः A, B, C बिन्दुओं के प्रतिमुख बिन्दु हैं। इसलिए त्रिभुज ABC' और $A'B'C$ प्रतिमुख त्रिभुज हैं और {धारा (3·4.1), 3} से इनके क्षेत्रफल बराबर हैं।



आकृति 83

धारा (2·9.2) में हमने स्थापित किया है कि,

$$\text{इंदुक का क्षेत्रफल} = 2\theta\, r^2 \qquad \ldots \quad \text{(i)}$$

जहाँ $\theta =$ इंदुक का कोण
और $r =$ गोले की त्रिज्या।

आकृति में,

$$\begin{aligned} \text{इंदुक } A &= \triangle + \text{त्रिभुज } A'BC \\ \text{इंदुक } B &= \triangle + \text{त्रिभुज } AB'C \\ \text{इंदुक } C &= \triangle + \text{त्रिभुज } ABC' \\ &= \triangle + \text{त्रिभुज } A'B'C \end{aligned}$$

योग करने पर,

$$\text{इंदुक } A + \text{इंदुक } B + \text{इंदुक } C$$

$$= 2\triangle + \{\triangle + A'BC + AB'C + A'B'C\}$$

$$\therefore \quad 2r^2(A+B+C) = 2\triangle + \text{अर्ध गोले का पृष्ठ} \qquad \because \text{(i)}$$

$$= 2\triangle + 2\pi r^2$$

$$\therefore \quad \boxed{\triangle = r^2(A+B+C-\pi)} \qquad \ldots \quad (1)$$

8·2. गोलीय आधिक्य (Spherical Excess)

व्यंजक $(A+B+C-\pi)$ को त्रिभुज ABC का गोलीय आधिक्य कहते हैं और इसे प्रतीकों की भाषा में E अक्षर द्वारा दर्शाते हैं।

टिप्पणी 1. गोलीय आधिक्य, E, एक कोण दर्शाता है।

2. धारा (8·1) के परिणाम में चूंकि $\triangle$ अवश्य ही एक धनात्मक राशि है जो त्रिभुज का क्षेत्रफल दर्शाती है इसलिए $(A+B+C-\pi)$ का मान भी धनात्मक होना चाहिये।

अतः

$$A+B+C > \pi$$

अर्थात, किसी गोलीय त्रिभुज के कोणों का योग दो समकोण से अधिक होता है (यही परिणाम धारा (3·8) में भी स्थापित किया गया)। इस परिणाम से हम गोलीय आधिक्य की परिभाषा इस प्रकार दे सकते हैं।

एक गोलीय त्रिभुज के कोणों का योग किसी समतल त्रिभुज के कोणों के योग से जितना अधिक होता है उसे त्रिभुज का गोलीय आधिक्य कहते हैं।

3. प्रतीकों की भाषा में, धारा (8·1) के सूत्र (1) को निम्नलिखित रूप में दर्शा सकते हैं :

$$\boxed{\triangle = r^2 E} \qquad . \quad . \quad . \quad (2)$$

उपर्युक्त व्याख्या में कोणों को रेडियन माप या वृत्तीय माप में लिया गया है। यदि कोणों को अंशों के माप में लिया जाय तो;

$$E = (A+B+C-180°)$$

और,

$$\triangle = \frac{\pi r^2}{180} \times E \qquad . \quad . \quad . \quad (3)$$

8·2.1, धारा (8·1) के परिणाम से निम्नलिखित महत्वपूर्ण परिणाम निगमित किया जा सकता है।

$$Er^2 = \frac{E}{4\pi} \times 4\pi r^2$$

$$\frac{Er^2}{4\pi r^2} = \frac{E}{4\pi}$$

या,

$$\frac{\triangle}{\text{गोले का क्षेत्रफल}} = \frac{E}{4\pi}$$

अतः किसी गोलीय त्रिभुज का क्षेत्रफल, गोले के क्षेत्रफल का वह भाग होता है जो उसका गोलीय आधिक्य आठ समकोण का होता है।

8·2.2. गोलीय बहुभुज क्षेत्र का क्षेत्रफल

मान लो, बहुभुज क्षेत्र में भुजाओं की संख्या n है। बहुभुज क्षेत्र के अन्दर स्थित किसी बिन्दु को दीर्घवृत्त चापों द्वारा उसके शीर्ष बिन्दुओं से मिलाने पर वह n गोलीय त्रिभुजों में विभाजित हो जाता है। इसलिए,

बहुभुज क्षेत्र का क्षेत्रफल $= n$ गोलीय त्रिभुजों का क्षेत्रफल

$= [$बहुभुज क्षेत्र के अन्तः कोण $+$ बिन्दु पर बने सब कोण$- n\pi]r^2$

$[\Sigma-(n-2)\pi]r^2$, $\Sigma =$ बहुभुज क्षेत्र के अन्तःकोणों का योग $= E'r$

यहाँ E' को हम गोलीय बहुभुज क्षेत्र का गोलीय आधिक्य कह सकते हैं।

उदाहरण। किसी गोलीय चतुर्भुज क्षेत्र $ABCD$ का,

$$\text{क्षेत्रफल}=(A+B+C+D-2\pi)r^2$$

और, $$\text{गोलीय आधिक्य}=(A+B+C+D-2\pi)$$

8·3. शेष अध्याय में हम त्रिभुज के गोलीय आधिक्य, E, के कुछ विशेष त्रिकोणमितीय फलनों को सूत्रों के रूप में स्थापित करेंगे। इन सूत्रों का अनुप्रयोग त्रिभुजों के निर्धारण में सहायक सिद्ध होता है।

8·3.1. धारा (8·2) से,

$$E=A+B+C-\pi$$

$$=(2S-\pi) \qquad \because\ 2S=A+B+C$$

$$\therefore \quad S=\tfrac{1}{2}E+\tfrac{1}{2}\pi \qquad . \ . \ . \ (4)$$

8·3.2. कागनॉली प्रमेय (Cagnoli's Theorem)

सिद्ध करो कि

$$\sin\tfrac{1}{2}E=\frac{\sqrt{\{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\}}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$\frac{E}{2}=\frac{A+B+C-\pi}{2}$$

$$\sin\frac{E}{2}=\sin\{\tfrac{1}{2}(A+B)-\tfrac{1}{2}(\pi-c)\}$$

$$=\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}C-\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}C$$

दलाम्ब्र सादृश्यताओं से,

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}$$

और $$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}$$

अतः,

$$\sin \tfrac{1}{2}E = \frac{\sin \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}c} \{\cos \tfrac{1}{2}(a-b) - \cos \tfrac{1}{2}(a+b)\}$$

या,
$$\sin \tfrac{1}{2}E = \frac{\sin C \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b}{\cos \frac{1}{2}c} \quad . \; . \; . \quad (5)$$

परन्तु साइन सूत्र से,

$$\sin C = \frac{2n}{\sin a \sin b}$$

$$\therefore \quad \sin \tfrac{1}{2}E = \frac{2n \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b}{\cos \frac{1}{2}c \,.\, 4 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b}$$

या,
$$\sin \tfrac{1}{2}E = \frac{n}{2 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c} \quad . \; . \; . \quad (6)$$

n, का मान रखने पर,

$$\boxed{\sin \tfrac{1}{2}E = \frac{\sqrt{\{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)\}}}{2 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}}$$

. . . (7)

विकल्प विधि। धारा (4·7) के अर्धभुजा सूत्रों से,

$$\sin \tfrac{1}{2}a \sin \tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-A)}{\sin B \sin C}} \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-B)}{\sin A \sin C}}$$

$$= \frac{\sqrt{\cos^2 S}}{\sin C} \sqrt{\left(\frac{\cos (S-A) \cos (S-B)}{\sin A \sin B}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\cos^2 S}}{\sin C} \,.\, \cos \tfrac{1}{2}c$$

$$\therefore \quad -\cos S = \frac{\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin C}{\cos \frac{1}{2}C}$$

वर्गमूल का चिन्ह (—) लेना आवश्यक है क्योंकि दाहिने पक्ष के सब पद (+) हैं और cos S का चिन्ह (—) है।

$$=\frac{\sin \frac{1}{4}(A+B+C-\pi)}{\cos \frac{1}{4}(A+B+C-\pi)}$$

$$\therefore \qquad \tan \tfrac{1}{4}E=\frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)-\cos \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}(A+B)+\sin \frac{1}{2}C}$$

दलाम्ब्र सादृश्यताओं से मान रखने पर,

$$\tan \tfrac{1}{4}E=\frac{\left\{\dfrac{\cos \frac{1}{2}(a-b) \cos \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}c}\right\}-\cos \frac{1}{2}C}{\left\{\dfrac{\cos \frac{1}{2}(a+b) \sin \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}c}\right\}+\sin \frac{1}{2}C}$$

$$=\left[\frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)-\cos \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}(a+b)+\cos \frac{1}{2}c}\right] \cot \tfrac{1}{2}C$$

अर्धकोण सूत्र से, cot $\frac{1}{2}C$ का मान रखने पर,

$$=\frac{\sin \frac{1}{4}(a-b+c) \sin \frac{1}{4}(c-a+b)}{\cos\frac{1}{4}(a+b+c) \cos \frac{1}{4}(a+b-c)}\sqrt{\frac{\sin s \sin (s-c)}{\sin (s-a) \sin(s-b)}}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(s-b) \sin \frac{1}{2}(s-c)}{\cos \frac{1}{2}s \cos \frac{1}{2}(s-c)}\sqrt{\frac{\sin s \sin (s-c)}{\sin (s-a) \sin (s-b)}}$$

करणी के अन्दर के फलनों को अर्धकोण फलनों में परिवर्तित करके सरल करने पर,

$$=\left[\frac{\sin \frac{1}{2}s \sin \frac{1}{2}(s-a) \sin \frac{1}{2}(s-b) \sin \frac{1}{2}(s-c)}{\cos \frac{1}{2}s \cos \frac{1}{2}(s-a) \cos \frac{1}{2}(s-b) \cos \frac{1}{2}(s-c)}\right]^{1/2}.$$

$$\therefore \boxed{\tan \tfrac{1}{4}E= [\tan \tfrac{1}{2}s \tan \tfrac{1}{2}(s-a) \tan \tfrac{1}{2}(s-b) \tan \tfrac{1}{2}(s-c)]^{1\,2}} \qquad \ldots \quad (10)$$

8·3.5. ल्विलियेर प्रमेय स्थापित करने की विकल्प विधि

$$A+B+C-\pi=E$$

$$\therefore \qquad \frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{C-E}{2}\right)$$

या, $$-\cos\left(\tfrac{1}{2}E-\tfrac{1}{2}\pi\right)=\frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}\qquad\because\ (4)$$

$$\therefore\qquad \sin\tfrac{1}{2}E=\frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}$$

आगे की क्रिया समान है ।

टिप्पणी—गोलीय आधिक्य का सूत्र (7) 17वीं सदी में विद्वान गणितज्ञ कागनाँली ने अपनी पुस्तक '*Trigonometrica*' में स्थापित किया था । अतः परिणाम **कागनाँली प्रमेय** के नाम से प्रसिद्ध है ।

8·3.3. धारा (8·3.2) के आधार पर, हम स्थापित कर सकते हैं कि

$$\cos(S-C)=\frac{\sin C\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c}$$

परन्तु $$\cos(S-C)=\cos\left\{\tfrac{1}{2}E+\tfrac{1}{2}\pi-C\right\}\qquad\because\text{ सूत्र }(4)$$
$$=\sin\left(C-\tfrac{1}{2}E\right)$$

$$\therefore\qquad \sin\left(C-\tfrac{1}{2}E\right)=\frac{\sin C\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c}\qquad\ldots\quad(8)$$

साइन सूत्र से,

$$\sin\left(c-\tfrac{1}{2}E\right)=\left[\frac{n}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\right]\qquad\ldots\quad(9)$$

8·3.4 ल्विलियेर प्रमेय (L' Huilier's Theorem)

सिद्ध करो कि,

$$\tan\tfrac{1}{4}E=\sqrt{\left\{\tan\tfrac{1}{2}s\tan\tfrac{1}{2}(s-a)\tan\tfrac{1}{2}(s-b)\tan\tfrac{1}{2}(s-c)\right\}}$$

$$\tan\tfrac{1}{4}E=\frac{\sin\left(\dfrac{A+B+C-\pi}{4}\right)}{\cos\left(\dfrac{A+B+C-\pi}{4}\right)}$$

सरल त्रिकोणमिति से,

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)-\sin\frac{1}{2}(\pi-C)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)-\cos\frac{1}{2}(\pi-C)}$$
$$=\frac{2\cos\frac{1}{4}(A+B+\pi-C)\sin\frac{1}{4}(A+B+C-\pi)}{2\cos\frac{1}{4}(A+B+\pi-C)\cos\frac{1}{4}(A+B+C-\pi)}$$

$$\therefore \quad \sin \tfrac{1}{2}(A+B) = \sin\{\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}(C-E)\} = \cos \tfrac{1}{2}(C-E)$$

और, $$\cos \tfrac{1}{2}(A+B) = \sin \tfrac{1}{2}(C-E)$$

अतः दलाम्ब्र साहृश्य ताओं से,

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(C-E)}{\cos \frac{1}{2}C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}c} \qquad \text{(i)}$$

और, $$\frac{\cos \frac{1}{2}(A+B)}{\sin \frac{1}{2}C} = \frac{\sin \frac{1}{2}(C-E)}{\sin \frac{1}{2}C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}c} \quad \text{. . (ii)}$$

(i) में योगान्तरानुपात से,

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(C-E) + \cos \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}(C-E) - \cos \frac{1}{2}C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b) + \cos \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}(a-b) - \cos \frac{1}{2}c}$$

या, $$\frac{2 \cos \frac{1}{4}(2C-E) \cos \frac{1}{4}E}{2 \sin \frac{1}{4}(2C-E) \sin \frac{1}{4}E} = \frac{2\cos \frac{1}{4}(a+c-b) \cos \frac{1}{4}(a-b-c)}{2\sin \frac{1}{4}(a-b+c) \sin \frac{1}{4}(-a+b+c)}$$

$$\therefore \tan \tfrac{1}{4}E \tan \tfrac{1}{4}(2C-E) = \tan \tfrac{1}{2}(s-a) \tan \tfrac{1}{2}(s-b) \quad \text{(iii)}$$

इसी प्रकार (ii) से,

$$\tan \tfrac{1}{4}E \cot \tfrac{1}{4}(2C-E) = \tan \tfrac{1}{2}s \tan \frac{(s-c)}{2} \qquad \text{(iv)}$$

(iii) और (iv) से,

$$\tan \tfrac{1}{4}E = \sqrt{\{\tan \tfrac{1}{2}s \tan \tfrac{1}{2}(s-a) \tan \tfrac{1}{2}(s-b) \tan \tfrac{1}{2}(s-c)\}}$$

इस विधि से निगमन करने से कुछ और उपयोगी परिणाम भी प्राप्त हो सकते हैं। जैसे

(iii) और (iv) का भाग करके वर्गमूल लेने पर,

$$\tan \tfrac{1}{4}(2C-E) = \sqrt{\{\tan \tfrac{1}{2}(s-a) \tan \tfrac{1}{2}(s-b) \cot \tfrac{1}{2}(s-c) \times \cot \tfrac{1}{2}s}$$

मान लो,

$$L = \sqrt{\{\cot \tfrac{1}{2}s \tan \tfrac{1}{2}(s-a) \tan \tfrac{1}{2}(s-b) \tan (\tfrac{1}{2}(s-c)\}} \quad . \; . \; . \quad (11)$$

तब,

$$\left.\begin{aligned} \tan \tfrac{1}{4}E &= \frac{L}{\cot \frac{1}{2}s} \\ \tan \tfrac{1}{4}(2C-E) &= \frac{L}{\tan \frac{1}{2}(s-c)} \\ \tan \tfrac{1}{4}(2A-E) &= \frac{L}{\tan \frac{1}{2}(s-a)} \\ \tan \tfrac{1}{4}(2B-E) &= \frac{L}{\tan \frac{1}{2}(s-b)} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

उपर्युक्त परिणामों का गुणा करने से,

$$\frac{L^4}{\cot \frac{1}{2}s \tan \frac{1}{2}(s-a) \tan \frac{1}{2}(s-b) \tan \frac{1}{2}(s-c)}$$

$$= \tan \tfrac{1}{4}E \tan \tfrac{1}{4}(2A-E) \tan \tfrac{1}{4}(2B-E) \tan \tfrac{1}{4}(2C-E)$$

या,

$$L = \sqrt{\{\tan \tfrac{1}{4}E \tan \tfrac{1}{4}(2A-E) \tan \tfrac{1}{4}(2B-E) \tan \tfrac{1}{4}(2C-E)\}} \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

फलन (L) को गोलीय त्रिभुज का ल्विलियरियन फलन (L' Huilierian function of a spherical triangle) कहते हैं। यदि त्रिभुज की तीनों भुजाएँ ज्ञात हों तो (L) का मान (11) से ज्ञात कर सकते हैं और (12) के सूत्रों से त्रिभुज का निर्धारण कर सकते हैं। इसी प्रकार यदि त्रिभुज के तीनों कोण मालूम हों तो (13) से (L) का मान ज्ञात करके (12) के सूत्रों से त्रिभुज का निर्धारण कर सकते हैं।

8·3.6. $\cos \frac{1}{2}E$ और $\tan \frac{1}{2}E$ के लिये सूत्र :—

धारा (8·3.1) के समीकरण (i) और (ii) को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं।

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(C-E)}{\cos \frac{1}{2}C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}c}$$

या, $$\cos \tfrac{1}{2}C \cos \tfrac{1}{2}E + \sin \tfrac{1}{2}C \sin \tfrac{1}{2}E = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}c} \cos \tfrac{1}{2}C \quad . \quad . \quad . \quad (i)$$

और,

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(C-E)}{\sin \frac{1}{2}C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}c}$$

$$\sin \tfrac{1}{2}C \cos \tfrac{1}{2}E - \cos \tfrac{1}{2}C \sin \tfrac{1}{2}E = \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}c} \sin \tfrac{1}{2}C \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

(i) × $\cos \frac{1}{2}C$ और (ii) × $\sin \frac{1}{2}C$, क्रिया करने के बाद, दोनों समीकरणों को जोड़ने पर,

$$(\cos^2 \tfrac{1}{2}C + \sin^2 \tfrac{1}{2}C) \cos \tfrac{1}{2}E$$

$$= \frac{1}{\cos \frac{1}{2}c} [\cos \tfrac{1}{2}(a-b) \cos^2 \tfrac{1}{2}C + \cos \tfrac{1}{2}(a+b) \sin^2 \tfrac{1}{2}C]$$

$$= \frac{1}{\cos \frac{1}{2}c} [\cos \tfrac{1}{2}(a-b) - \cos \tfrac{1}{2}(a-b) \sin^2 \tfrac{1}{2}C + \cos \tfrac{1}{2}(a+b) \sin^2 \tfrac{1}{2}C]$$

$$= \frac{1}{\cos \frac{1}{2}c} [\cos \tfrac{1}{2}(a-b) - \sin^2 \tfrac{1}{2}C \{\cos \tfrac{1}{2}(a-b) - \cos \tfrac{1}{2}(a+b)\}]$$

$$\therefore \cos \tfrac{1}{2}E = \frac{1}{\cos \frac{1}{2}c} [\cos \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}b + \sin \tfrac{1}{2}a \sin \tfrac{1}{2}b \cos C] \quad \ldots \quad (14)$$

$$= \frac{1}{4 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c} [4 \cos^2 \tfrac{1}{2}a \cos^2 \tfrac{1}{2}b + 4 \sin \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}a \sin \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}c \cos C]$$

$$= \frac{1}{4 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c} \{(1+\cos a)(1+\cos b) + \sin a \sin b \cos C]$$

$$= \frac{1}{4 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c} [(1+\cos a+\cos b+ (\cos a \cos b+\sin a \sin b \cos C)]$$

$$\therefore \quad \boxed{\cos \tfrac{1}{2}E = \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}} \quad . \; . \quad (15)$$

सूत्र (6) और (15) से,

$$\tan \tfrac{1}{2}E = \frac{n}{2\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c} \times \frac{4\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}{1+\cos a+\cos b+\cos c}$$

$$\therefore \quad \boxed{\tan \tfrac{1}{2}E = \frac{2n}{1+\cos a+\cos b+\cos c}} \quad . \; . \; . \quad (16)$$

सूत्र (15) के निगमन की विकल्प विधि

8·3.7. {धारा (4·8), उदाहरण 1 में हमने स्थापित किया है कि

$$\frac{\sin (B+C)}{\sin A} = \frac{\cos b+\cos c}{1+\cos a}$$

योगानुपात से,

$$\frac{\sin (B+C)+\sin A}{\sin A} = \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{1+\cos a}$$

$$\therefore \quad \frac{2 \sin \frac{1}{2}(A+B+C) \cos \frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin A}$$

$$= \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{2 \cos^2 \frac{1}{2}a}$$

या, $$\frac{2 \sin S \cos (S-A)}{\sin A} = \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{2\cos^2 \frac{1}{2}a} \quad . \; . \quad \text{(i)}$$

परन्तु, $\sin S = \cos \frac{1}{2}E$ $\because$ सूत्र (4)

और $\cos (S-A) = \dfrac{\tan \frac{1}{2}a}{\tan R}$ $\because$ धारा (7·3.1), सूत्र (1)

$$= \frac{\dfrac{\tan \frac{1}{2}a}{\sin \frac{1}{2}a}}{\sin A \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}$$

$\because$ धारा (7·3.1) सूत्र (3)

$$= \frac{\sin A \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}a}$$

(i) में मान स्थापित करने पर,

$$\frac{2\cos\frac{1}{2}E\sin A\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\sin A\cos\frac{1}{2}a}=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{2\cos^2\frac{1}{2}a}$$

$$\therefore\qquad \cos\tfrac{1}{2}E=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

8·3.8. sin $\frac{1}{4}E$ और cos $\frac{1}{4}E$ के लिए सूत्र

सूत्र (15) से

$$\cos\tfrac{1}{2}E=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\qquad(17)$$

और $\cos\frac{1}{2}E=1-2\sin^2\frac{1}{4}E$

$$\therefore\qquad \sin^2\tfrac{1}{4}E=\tfrac{1}{2}(1-\cos\tfrac{1}{2}E)$$

$$=\tfrac{1}{2}\left[1-\frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\right]$$

$$=\frac{1+2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c-\cos^2\frac{1}{2}a-\cos^2\frac{1}{2}b-\cos^2\frac{1}{2}c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\sin\tfrac{1}{2}s\sin\tfrac{1}{2}(s-a)\sin\tfrac{1}{2}(s-b)\sin\tfrac{1}{2}(s-c)$$

$$\therefore\qquad \sin\tfrac{1}{4}E=\sqrt{\{\sin\tfrac{1}{2}s\sin\tfrac{1}{2}(s-a)\sin\tfrac{1}{2}(s-b)\sin\tfrac{1}{2}(s-c)\}}\qquad\ldots\quad(18)$$

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि,

$$\cos\tfrac{1}{2}E=\sqrt{(}\cos\tfrac{1}{2}s\cos\tfrac{1}{2}(s-a)\cos\tfrac{1}{2}(s-b)\cos(s-c))\qquad\ldots\quad(19)$$

(18) और (19) से भाग की क्रिया द्वारा ल्विलियेर सूत्र प्राप्त कर सकते हैं।

8·4. विविध उदाहरण.

उदाहरण 1. सिद्ध करो कि गोलीय त्रिभुज ABC में,

(अ) $\sin\frac{1}{2}E=-\cos S$

(ब) $\sin^2\frac{1}{2}E=N\tan\frac{1}{2}a\tan\frac{1}{2}b\tan\frac{1}{2}c$

(अ)
$$E=A+B+C-\pi$$
$$=2S-\pi$$
$$\therefore \quad \tfrac{1}{2}E=S-\tfrac{1}{2}\pi$$
या,
$$\sin\tfrac{1}{2}E=-\cos S$$

(ब) अर्धभुजा सूत्रों से दाहिने पक्ष में मान रखने से,

$$\text{दाहिना पक्ष}=N\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}}\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-B)}{\cos(S-A)\cos(S-C)}}$$
$$\times\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-C)}{\cos(S-A)\cos(S-B)}}$$
$$=\frac{N.(-\cos S)^2}{\sqrt{\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}}$$
$$=\cos^2 S \because N=\sqrt{(\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}$$
$$=\sin^2\tfrac{1}{2}E \qquad \because \text{ भाग (अ)}$$

उदाहरण 2. गोलीय त्रिभुज ABC, $C=\pi/2$ में सिद्ध करो कि,

(अ) $\sin\tfrac{1}{2}E=\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\sec\tfrac{1}{2}c$

(ब) $\cos\tfrac{1}{2}E=\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\sec\tfrac{1}{2}c$

(स) $\dfrac{\sin^2 c}{\cos c}\cos E=\dfrac{\sin^2 a}{\cos a}+\dfrac{\sin^2 b}{\cos b}$

क्रिया (अ) धारा (8·3.2), सूत्र (5) से;

$$\sin\tfrac{1}{2}E=\frac{\sin C\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b}{\cos\tfrac{1}{2}c}$$
$$=\frac{\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b}{\cos\tfrac{1}{2}c}=\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\sec c$$
$$\because C=\frac{\pi}{2}$$

(ब) धारा (8·3.6) सूत्र 14 से,

$$\cos\tfrac{1}{2}E=\frac{\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b+\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\cos C}{\cos\tfrac{1}{2}c}$$

$$\therefore \qquad \cos \tfrac{1}{2}E = \frac{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b}{\cos \frac{1}{2}c} \quad \because C = \pi/2$$

$$= \cos \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}b \sec \tfrac{1}{2}c$$

(स) खंड (ब) से

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2}E = \frac{2 \cos^2 \frac{1}{2}a \cos^2 \frac{1}{2}b}{\cos^2 \frac{1}{2}c}$$

$$= \frac{(1+\cos a)(1+\cos b)}{1+\cos c}$$

ग्रौर,

$$\cos E = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2}E - 1$$

$$= \frac{(1+\cos a)(1+\cos b)}{1+\cos c} - 1$$

$$= \frac{\cos a + \cos b}{1+\cos c} \qquad \because \text{धारा } (5{\cdot}2), \text{ सूत्र } (9)$$

$$\therefore \qquad \frac{\sin^2 c}{\cos c} \cos E = \frac{\cos a + \cos b}{1+\cos c} \times \frac{(1-\cos^2 c)}{\cos c}$$

$$= \frac{(\cos a + \cos b)(1-\cos c)}{\cos c}$$

$$= \frac{(\cos a + \cos b)(1-\cos a \cos b)}{\cos a \cos b}$$

∵ धारा (5·2),
सूत्र (9)

$$= \frac{\cos a(1-\cos^2 b) + \cos b(1-\cos^2 a)}{\cos a \cos b}$$

$$= \frac{\sin^2 a}{\cos a} + \frac{\sin^2 b}{\cos b}$$

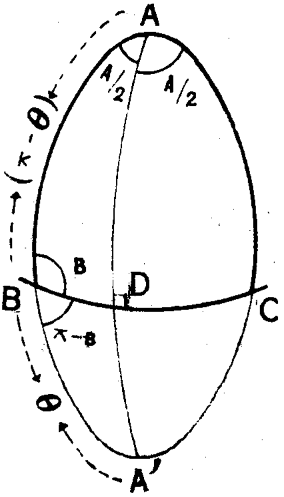
उदाहरण 3. किसी गोले के एक इंदुक को दो समद्विबाहु गोलीय त्रिभुजों में इस प्रकार विभाजित किया गया कि एक त्रिभुज का क्षेत्रफल दूसरे का n गुना है। सिद्ध करो कि

$$\tan \tfrac{1}{2}A \cos \theta = \tan \left(\frac{n-1}{n+1}\right) \frac{A}{2}$$

यहाँ $A=$ इंदुक का कोण और θ, छोटे त्रिभुज की बराबर भुजाएँ दर्शाता है।

[सागर, '59]

मान लो AA', गोले पर स्थित एक इंदुक है जिसका कोण A है। दीर्घवृत्त चाप BC उसे इस प्रकार काटता है कि,



आकृति 84

$$\text{समद्विबाहु } ABC = n \text{ (समद्विबाहु त्रिभुज } A'BC) \qquad \text{(i)}$$

मान लो,
$$BA' = \theta$$
$$\therefore \quad AB = \pi - \theta \qquad \text{(ii)}$$

त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $=(A+B+C-\pi)r^2 = Er^2$

और, त्रिभुज $A'BC$ का क्षेत्रफल $=(A'+\pi-B+\pi-C-\pi)r^2$

$$=(A-2B+\pi)\,r^2 \qquad \because B=C \text{ और } A=A'$$

$\therefore$ (i) से,

$$(A+B+C-\pi)r^2 = n\,.(A-2B+\pi)r^2$$

$$\therefore \quad 2B\,(n+1)-\pi\,(n+1) = A\,(n-1)$$

या,
$$B = \tfrac{1}{2}\pi + \left(\frac{n-1}{n+1}\right)\frac{A}{2} \qquad \text{(iii)}$$

अब, मान लो बिन्दु D, BC का मध्य बिन्दु है। AD को मिलाओ। चूँकि त्रिभुज ABC समद्विबाहु है, इसलिए त्रिभुज ABD एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $D=90°$। समकोण त्रिभुज ABD में नेपियर प्रथम नियम से,

$$\sin\{\pi/2-(\pi-\theta)\}=\tan(\pi/2-A/2)\tan(\pi/2-B)$$

या,
$$\cos(\pi-\theta)=\cot A/2 \cot B$$

(iii) से मान रखने पर,

$$-\cos\theta=\cot\tfrac{1}{2}A\cot\left\{\frac{\pi}{2}+\left(\frac{n-1}{u+1}\right)\frac{A}{2}\right\}$$

$$\therefore \qquad \tan\tfrac{1}{2}A\cos\theta=\tan\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\frac{A}{2}$$

उदाहरण 4. गोलीय समबहुभुज क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसकी भुजाएँ गोले पर स्थित दीर्घवृत्त चाप हैं। इस परिणाम से निगमित करो कि यदि एक लघुवृत्त की गोलीय त्रिज्या r' हो तो उसके द्वारा निर्मित गोलीय खंड के वक्र पृष्ठ और पूरे गोले के वक्र पृष्ठ में,

$$(1-\cos r'):2$$

का अनुपात होता है। [सागर, '56]

मान लो $ABCD\ldots$, n भुजाओं वाला समबहुभुज क्षेत्र है। अतः इसके अन्तः कोण परस्पर बराबर हैं।

मान लो लघुवृत्त $ABCD\ldots$, समबहुभुज क्षेत्र का परिवृत्त है जिसका ध्रुव P, और त्रिज्या r' है।

$$\therefore \qquad PA=PB=PC=\ldots\ldots=r' \qquad \ldots \quad \text{(i)}$$

अब P से भुजा AB पर PQ लम्ब डाला। अब यदि कोण PAB को $(\pi/2-\theta)$ से दर्शाया जाये तो स्पष्ट है कि जैसे-जैसे n (क्षेत्र की भुजाओं की संख्या) का मान बढ़ेगा, भुजा AB छोटी होती जायेगी और θ का मान कम होता जायेगा।

समकोण गोलीय त्रिभुज APQ, $Q=90°$ में,

$$\angle APQ=\tfrac{1}{2}\angle APB=\tfrac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{n}\right)=\left(\frac{\pi}{n}\right) \qquad \ldots \quad \text{(ii)}$$

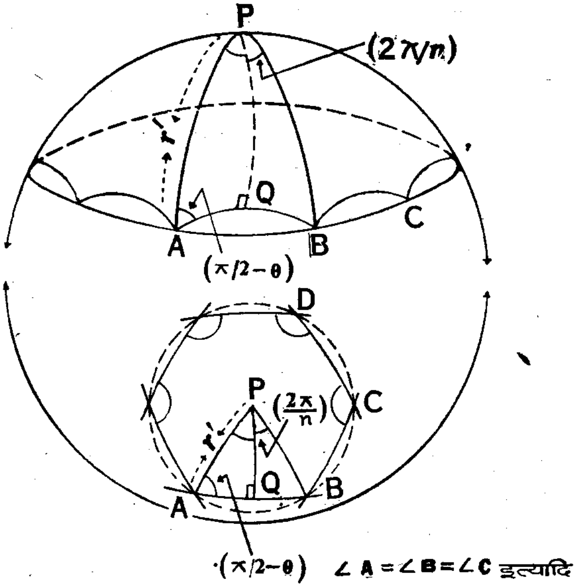
और नैपियर प्रथम नियम से,

$$\sin(\pi/2-PA)=\tan(\pi/2-QPA)\tan(\pi/2-APQ)$$

(i) और (ii) से,

$$\cos r' = \tan\theta \cot(\pi/n)$$

∴ $$\theta = \tan^{-1}\{\tan(\pi/n)\cos r'\} \quad . \; . \; . \quad \text{(iii)}$$



आकृति 85

अब मान लो, बहुभुज क्षेत्र की भुजाओं की संख्या अनन्त की ओर बढ़ाई जाये तो बहुभुज क्षेत्र अपने परिवृत्त की ओर अग्रसर होगा। अतः हम कह सकते हैं कि बहुभुज क्षेत्र का सीमान्त रूप उसका परिवृत्त है जिसकी त्रिज्या r' है। धारा (8·2.2) से,

बहुभुज क्षेत्र का क्षेत्रफल $= [\Sigma-(n-2)\pi]\; r^2$, $r =$ गोले की त्रिज्या

$$= [2n(\pi/2-\theta)-(n-2)\pi]\; r^2$$

$$= 2(\pi-n\theta)\, r^2$$

$$= 2r^2\left\{\pi - n\tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{2}\cdot\cos r'\right)\right\} \quad \because \text{(iii)}$$

अब,

$$\underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\, n \tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{n}\cos r'\right)=\underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\left(n.\frac{\pi}{n}.\cos r'\right)$$

$$=\pi\cos r'$$

$\therefore$ बहुभुज क्षेत्र का सीमान्त क्षेत्रफल $=2r^2(\pi-\pi\cos r')$

$$=2\pi r^2(1-\cos r')$$

अतः

$$\frac{[r' \text{ त्रिज्या वाले लघुवृत्त द्वारा निर्मित गोलीय खंड का वक्र पृष्ठ}]}{\text{पूरे गोले का वक्र पृष्ठ}}$$

$$=\frac{2\pi r^2(1-\cos r')}{4\pi r^2}$$

$$=\frac{1-\cos r'}{2}$$

प्रश्न संग्रह 12

यदि गोलीय त्रिभुज ABC का गोलीय आधिक्य E है तो सिद्ध करो कि

1. $\tan\frac{1}{4}E\tan\frac{1}{2}(A-\frac{1}{2}E)=\tan\frac{1}{2}s\tan\frac{1}{2}(s-a)$
2. $\sin s=\dfrac{\{\sin\frac{1}{2}E\sin(A-\frac{1}{2}E)\sin(B-\frac{1}{2}E)\sin(C-\frac{1}{2}E)\}}{2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}$
3. $\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(C-E)=\cos\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}(a-b)$
4. $\cot\frac{1}{2}E=\cot C+\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b\operatorname{cosec}C$
5. सिद्ध करो कि,

$$E\gtrless\pi \text{ जब, } (1+\cos a+\cos b+\cos c)\gtrless 0$$

6. गोलीय त्रिभुज ABC की भुजा BC के मध्य बिन्दु D को सम्मुख शीर्ष A से मिलाया। यदि इस प्रकार बने त्रिभुज ABD और गोलीय आधिक्य क्रमशः E_1 और E_2 हैं तो सिद्ध करो कि

$$\sin\frac{1}{2}E_1\cos\frac{1}{2}c=\sin\frac{1}{2}E_2\cos\frac{1}{2}b$$

7. गोलीय त्रिभुज ABC में यदि, $a=b$ और $C=\frac{\pi}{2}$ है तो सिद्ध करो कि

$$\tan E=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2 a}{\cos a}\right)$$

8. सिद्ध करो कि समकोण गोलीय त्रिभुज के कोणों का योग चार समकोण से कम होता है।

9. गोलीय त्रिभुज ABC में, यदि

$$a=b=\frac{\pi}{3} \text{ और } c=\frac{\pi}{2}$$

है तो सिद्ध करो कि

$$E=\cos^{-1}(7/9)$$

10. यदि किसी गोलीय त्रिभुज के कोणों का योग चार समकोण है तो सिद्ध करो कि

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}a+\cos^2 \tfrac{1}{2}b+\cos^2 \tfrac{1}{2}c=1$$

[संकेत $\quad A+B+C=2\pi$

$\therefore \quad \frac{1}{2}E=\pi/2$

धारा (8·3.8) सूत्र (17) में मान रखकर अभीष्ट परिणाम प्राप्त करो।]

11. यदि गोलीय त्रिभुज ABC में A', B' और C' क्रमशः भुजा BC, CA और AB के मध्य बिन्दु हैं तो सिद्ध करो कि,

$$\cos \tfrac{1}{2}E=\frac{\cos A'B'}{\cos \frac{1}{2}c}=\frac{\cos B'C'}{\cos \frac{1}{2}a}=\frac{\cos C'A'}{\cos \frac{1}{2}b}$$

[सागर, '66]

12. यदि गोलीय त्रिभुज ABC में $a=b$, तो सिद्ध करो कि

$$\tan \tfrac{1}{4}E=\tan \tfrac{1}{4}c\sqrt{\{\tan \tfrac{1}{2}(a+\tfrac{1}{2}c)\ \tan \tfrac{1}{2}(a-\tfrac{1}{2}c)\}}$$

13. समत्रिबाहु गोलीय त्रिभुज ABC में सिद्ध करो कि,

$$\tan \tfrac{1}{4}E=\tan \tfrac{1}{4}a\sqrt{\left\{\tan\frac{3a}{4}\tan\frac{a}{4}\right\}}$$

14. समद्विबाहु गोलीय त्रिभुज ABC, $AB=AC$, की भुजा BC में बिन्दु X इस प्रकार लिया कि

$$XC=\tfrac{1}{4}BC$$

तो सिद्ध करो कि

$$\frac{\sin \frac{1}{2}E_1}{\sin \frac{1}{2}E_2}=1+2\cos XC$$

जहाँ E_1 और E_2 क्रमशः त्रिभुज ABX और AXC के गोलीय आधिक्य दर्शाते हैं।

15. r त्रिज्या वाले गोले के पृष्ठ पर r_1, r_2 और r_3 त्रिज्या वाले तीन लघुवृत्त परस्पर P, Q और R बिन्दुओं पर स्पर्श करते हुए स्थित हैं। यदि इन लघुवृत्तों के केन्द्रों द्वारा निर्मित गोलीय त्रिभुज ABC के कोण A, B और C हैं तो सिद्ध करो कि,

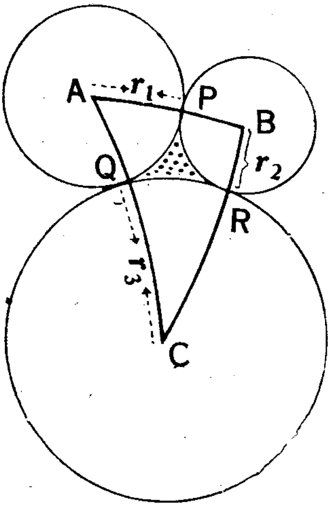
गोलीय त्रिभुज PQR का क्षेत्रफल $=$

$$(A \cos r_1 + B \cos r_2 + C \cos r_3 - \pi) r^2$$

[जबलपुर, 1960]

[संकेत—

उदाहरण 4 से,



आकृति 86

केन्द्र A वाले लघुवृत्त द्वारा निर्मित गोलीय खंड का वक्र पृष्ठ

$$= (1 - \cos r_1) 2\pi r^2$$

$\therefore$ गोलीय त्रिभुज APQ का क्षेत्रफल $= \dfrac{A}{2\pi}(1 - \cos r_1)\, 2\pi r^2$

$$= Ar^2 (1 + \cos r_1)$$

$$\triangle PQR = \{\triangle ABC - \triangle APQ - \triangle BPR - \triangle CQR\}]$$

16. सिद्ध करो कि एक गोलीय समचतुर्भुज क्षेत्र की भुजा a और कोण θ, निम्नलिखित सम्बन्ध से आबद्ध होते हैं।

$$\cos \tfrac{1}{2}a \sin \tfrac{1}{2}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

यदि प्रतीक $\triangle$ सम चतुर्भुज क्षेत्र का क्षेत्रफल दर्शाता है तो सिद्ध करो कि

$$\sec \tfrac{1}{2}a = \sin\left(\frac{\triangle}{8r^2}\right) + \cos\left(\frac{\triangle}{8r^2}\right)$$

जहाँ r गोले की त्रिज्या है। [सागर, '55]

17. गोले पर स्थित, n भुजाओं वाले, समबहुभुज क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करो। यदि इस बहुभुज क्षेत्र का क्षेत्रफल गोले के अर्ध पृष्ठ के बराबर हो तो सिद्ध करो कि बहुभुज क्षेत्र गोले का एक दीर्घवृत्त दर्शाता है।

18. गोले पर स्थित एक त्रिभुज का क्षेत्रफल यदि गोले के वक्र पृष्ठ का चौथाई भाग है तो सिद्ध करो कि त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाले चाप एक चतुर्थांश के तुल्य होंगे।

[संकेत

$$Er^2 = \tfrac{1}{4} \,.\, 4\pi r^2$$

$$\therefore \qquad E = \pi$$

प्रश्न (11) से,

$$\begin{aligned} \cos A'B' &= \cos \tfrac{1}{2}c \cos \tfrac{1}{2}E \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \qquad A'B' = \frac{\pi}{2}, \text{ इत्यादि ।]}$$

19. किसी गोलीय त्रिभुज में यदि

$$\cos C = -\tan \tfrac{1}{2}a \tan \tfrac{1}{2}b$$

हो तो सिद्ध करो कि

$$C = A + B$$

20. सिद्ध करो कि गोलीय त्रिभुज ABC में,

$$\sin \tfrac{1}{2}E = 2n'$$

जहाँ n', त्रिभुज ABC की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं से बने गोलीय त्रिभुज का मानक (Norm) दर्शाता है।

21. गोलीय त्रिभुज ABC के ध्रुवीय त्रिभुज का गोलीय आधिक्य σ और सह-इंदुक त्रिभुजों के गोलीय आधिक्य क्रमशः E', E'' और E''' हैं। सिद्ध करो कि

$$\tan \tfrac{1}{4}\sigma = \sqrt{(\tan \tfrac{1}{4}E' \tan \tfrac{1}{4}E'' \tan \tfrac{1}{4}E''' \cot E)}$$

अध्याय 9

लघु-विचरण

(SMALL VARIATIONS)

9·1. पिछले अध्यायों में हमने गोलीय त्रिभुजों के अवयवों के बीच विभिन्न सम्बन्ध स्थापित किये हैं। अब मान लो, तीन अवयवों के मान दिये हुए हैं (या अवलोकन द्वारा प्राप्त किये गये हैं) और शेष मान ज्ञात करना है। इसके लिए हम चार (तीन ज्ञात और एक अज्ञात) अवयवों के बीच, पूर्व स्थापित सम्बन्धों में से, उपयुक्त सम्बन्ध चुनकर उससे अज्ञात अवयव की गणना करते हैं। मान लो, अवयवों के दिये हुए मानों में से कुछ (या सब) में (अवलोकन या दूसरे कारणों से) कुछ अशुद्ध हैं तो गणना द्वारा प्राप्त अवयव के मान में भी कुछ अशुद्धि आयेगी। गणित की भाषा में उपर्युक्त कथन को निम्नलिखित ढंग से प्रतिपादित कर सकते हैं। यदि त्रिभुज के कुछ अवयवों के मानों में सूक्ष्म परिवर्तन (अशुद्धि) किया जाये (जबकि कुछ अवयव अचर भी रह सकते हैं) और इन परिवर्तित मानों से हम शेष अज्ञात अवयवों के मानों की गणना करें तो प्राप्त मानों में भी संगत परिवर्तन (अशुद्धि) सम्मिलित रहेगा। ज्ञात अवयवों में अशुद्धियाँ मालूम हों तो अज्ञात अवयवों के मानों की अशुद्धियाँ ज्ञात करता विभिन्न अनुप्रयोगों में अत्यन्त महत्वपूर्ण स्थान रखता है। अवयवों के मानों में इस प्रकार के सूक्ष्म परिवर्तन (या अशुद्धि) को **लघु विचरण** (Small Variation) कहते हैं। सामान्यतः अवयव के पूर्व $\triangle$ चिन्ह लगाकर उस अवयव का लघु-विचरण दर्शाते हैं। इस अध्याय में हम त्रिभुज के अवयवों के लघुविचरणों के बीच कुछ सम्बन्ध स्थापित करेंगे जिनकी सहायता से अभीष्ट लघु-विचरण प्राप्त किया जा सके। अवयवों के बीच पिछले अध्यायों में स्थापित सम्बन्धों का आंशिक अवकलन(Partial Differentiation) करने से इस प्रकार के सम्बन्ध प्राप्त हो सकते हैं।

9·2. जब गोलीय त्रिभुज की एक भुजा और उसका सम्मुख कोण अचर रहता है तब शेष किन्हीं दो अवयवों के लघु विचरणों में सम्बन्ध स्थापित करना।

मान लो C और c अचर रहते हैं।

हम जानते हैं कि त्रिभुज में छः अवयव होते हैं। इन छः अवयवों में यदि C और c अचर हैं तो शेष चार अवयवों $A, B\ a, b$ में से दो अवयव हम ${}^4C_2=6$ विभिन्न तरीकों से चुन सकते हैं। अतः इन छः तरीकों द्वारा चुने दो अवयवों के लघु विचरणों में सम्बन्ध स्थापित करना है।

(i) a और b के लघु विचरणों में सम्बन्ध, जब C और c अचर हैं।

कोसाइन सूत्र

$$\cos c=\cos a \cos b+\sin a \sin b \cos C$$

के आंशिक अवकलन से,

$$0=(-\sin a\,\Delta\,a)\cos b-\sin b\,\Delta\,b \cos a$$
$$+\cos a\,\Delta\,a \sin b \cos C+\cos b\,\Delta\,b \sin a \cos C$$

$\because$ C और c अचर हैं।

यहाँ $\Delta\,a$ और $\Delta\,b$ क्रमशः a और b में लघु विचरण दर्शाते हैं।

$$\therefore \quad \Delta\,a\,(\sin a \cos b-\cos a \sin b \cos C)$$
$$+\Delta\,b\,(\sin b \cos a-\cos b \sin a \cos C)=0$$

साइन कोसाइन सूत्र से कोष्ठकों का नान रखने पर,

$$\Delta\,a\,(\sin c \cos B)+\Delta\,b\,(\sin c \cos A)=0$$

या

$$\cos B\,\Delta\,a+\cos A\,\Delta\,b=0$$

(ii) a और B के लघु विचरणों में सम्बन्ध, जब C और c अचर हैं।

कोटैन्जेन्ट सूत्र

$$\cos a \cos B=\sin a \cot c-\sin B \cot C$$

का आंशिक अवकलन करने से,

$$-\sin a\,\Delta\,a \cos B-\sin B\,\Delta\,B \cos a=\cos a\,\Delta\,a \cot c$$
$$-\cos B\,\Delta\,B \cos C$$

$\because$ C, c अचर हैं।

$$\therefore \quad (\sin a \cos B+\cos a \cot c)\,\Delta\,a=(\cos B \cot C-\sin B$$
$$\times \cos a)\,\Delta\,B$$

या,
$$(\sin a \sin c \cos B + \cos a \cos c)\frac{\Delta a}{\sin c}$$
$$= (\cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a)\frac{\Delta B}{\sin C}$$

कोसाइन और सम्पूरक कोसाइन सूत्रों से,

$$\frac{\cos b}{\sin c}\Delta a = \frac{-\cos A}{\sin C}\Delta B$$

या,
$$\cos b\, \Delta a = -\left(\frac{\sin c}{\sin C}\right)\cos A\, \Delta B$$

साइन सूत्र से,

$$\cos b \Delta\, a = -\left(\frac{\sin b}{\sin B}\right)\cos A\, \Delta B$$

या,
$$\cot b \sin B\, \Delta\, a + \cos A \Delta\, B = 0$$

(iii) a और A के लघु-विचरणों में सम्बन्ध, जब C और c अचर हैं।

साइन सूत्र,

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin c}{\sin C},$$

में लघु-गुणक लेकर, आंशिक अवकलन करने से,

$$\frac{1}{\sin a}\cos a\, \Delta\, a - \frac{1}{\sin A}\cos A\, \Delta\, A = 0$$

∵ C और c अचर हैं।

या,
$$\cot a\, \Delta\, a = \cot A\, \Delta\, A$$

इसी प्रकार निम्नलिखित शेष सम्बन्ध भी स्थापित किये जा सकते हैं। [C और c अचर हैं, तब

(iv) $\Delta\, A$ और $\Delta\, B$ में, $\cos b\, \Delta\, A + \cos a\, \Delta\, B = 0$

(v) $\Delta\, b$ और $\Delta\, A$ में; $\cot a \sin A\, \Delta\, b + \cos B\, B\, \Delta\, A = 0$

(vi) $\Delta\, b$ और $\Delta\, B$ में; $\cot b\, \Delta\, b = \cot B\, \Delta\, B$]

[**टिप्पणी**—1. उपर्युक्त धारा के अन्तर्गत हम C और c के अतिरिक्त निम्नलिखित और स्थितियों का भी अध्ययन कर सकते हैं।

(अ) जब a और A अचर रहें ।

(ब) जब b और B अचर रहें ।

2. त्रिभुज के छः अवयवों में से दो अचर अवयवों का चुनाव भी $^6C_2$ विभिन्न तरीकों से किया जा सकता है और उन स्थितियों में विभिन्न सम्बन्ध स्थापित किये जा सकते हैं ।

9·3. गोलीय त्रिभुज के किन्हीं चार अवयवों के लघु-विचरणों में सम्बन्ध ।

चार अवयवों के लघु विचरणों में सम्बन्ध स्थापित करने के लिए हमें पहले उन चार अवयवों के बीच सम्बन्ध चुनना पड़ेगा । त्रिभुज के चार अवयवों में विभिन्न सम्बन्ध (जैसे कोसाइन सूत्र, सम्पूरक कोसाइन सूत्र, कोटैन्जेन्ट सूत्र, इत्यादि) अध्याय 4 में स्थापित किये गये हैं । उदाहरण के रूप में निम्न दो स्थितियों को पूर्ण व्याख्या के साथ यहाँ दिया जा रहा है ।

(अ) गोलीय त्रिभुज ABC के a, b, c, A अवयवों के लघु विचरणों में सम्बन्ध ।

कोसाइन सूत्र,

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

का आंशिक अवकलन करने से,

$$\begin{aligned} -\sin a \,\Delta\, a = &-\sin b \cos c \,\Delta\, b - \sin c \cos b \,\Delta\, c \\ &+\cos b \sin c \cos A \,\Delta\, b + \cos c \sin b \\ &\times \cos A \,\Delta\, c - \sin b \sin c \sin A \,\Delta\, A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \sin a \,\Delta\, a = &(\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A) \,\Delta\, b \\ &+(\sin c \cos b - \sin b \cos c \cos A) \,\Delta\, c \\ &+\sin b \sin c \sin A \,\Delta\, A \end{aligned}$$

साइन-कोसाइन सूत्रों से कोष्ठकों के मान रखने पर,

$$\sin a \,\Delta\, a = (\sin a \cos C) \,\Delta\, b + \sin a \cos B \,\Delta\, c + \\ \sin b \sin c \sin A \,\Delta\, A$$

$$\therefore \quad \Delta a = \cos C\,\Delta b + \cos B\,\Delta c + K \sin b \sin c\,\Delta A \quad \ldots (1)$$

जहाँ,
$$K = \frac{\sin A}{\sin a}$$

इसी प्रकार (a, b, c, B) और (a, b, c, C) अवयवों के लघु विचरणों में भी निम्नलिखित सम्बन्ध सरलतापूर्वक स्थापित किये जा सकते हैं।

$$\Delta b = \cos A\,\Delta c + \cos C\,\Delta a + K \sin c \sin a\,\Delta B \quad \ldots (2)$$

और
$$\Delta c = \cos B\,\Delta a + \cos A\,\Delta b + K \sin a \sin b\,\Delta C \quad \ldots (3)$$

(ब) गोलीय त्रिभुज ABC के A, B, C, a अवयवों के लघु विचरणों में सम्बन्ध।

सम्पूरक कोसाइन सूत्र,

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

के आंशिक अवकलन से,

$$\begin{aligned} -\sin A\,\Delta A = {} & \sin B \cos C\,\Delta B + \sin C \cos B\,\Delta C \\ & + \cos B \sin C \cos a\,\Delta B + \cos C \sin B \cos a\,\Delta C \\ & - \sin B \sin C \sin a\,\Delta a \end{aligned}$$

या,
$$\begin{aligned} -\sin A\,\Delta A = {} & (\sin B \cos C + \cos B \sin C \cos a)\,\Delta B \\ & + (\sin C \cos B + \cos C \sin B \cos a)\,\Delta C \\ & - \sin B \sin C \sin a\,\Delta a \end{aligned}$$

सम्पूरक साइन-कोसाइन सूत्रों में कोष्ठकों के मान रखने पर,

$$\begin{aligned} -\sin A\,\Delta A = {} & (\sin A \cos c)\,\Delta B + (\sin A \cos b)\,\Delta C \\ & - \sin B \sin C \sin a\,\Delta a \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \Delta A = -\cos c\,\Delta B - \cos b\,\Delta C + \sin B \sin C \left(\frac{1}{K}\right) \Delta a \quad \ldots (4)$$

जहाँ,
$$\frac{\sin A}{\sin a} = K$$

इसी प्रकार, हम स्थापित कर सकते हैं कि

$$\Delta B = -\cos a \Delta C - \cos c \Delta A + \sin C \sin A \left(\frac{1}{K}\right) \Delta b \quad \ldots \quad (5)$$

$$\Delta C = -\cos b \Delta A - \cos a \Delta B + \sin A \sin B \left(\frac{1}{K}\right) \Delta c \quad \ldots \quad (6)$$

9·3.1. धारा (1·3) खंड (अ) के सम्बन्धों से हम उस व्यापक स्थिति की कल्पना कर सकते हैं जिसमें त्रिभुज के सब अवयवों में परिवर्तन होता है। उपर्युक्त धारा में स्थापित सम्बन्धों,

$$\Delta a = \cos C \Delta b + \cos B \Delta c + K \sin b \sin c \Delta A \quad (1)$$

$$\Delta b = \cos A \Delta c + \cos C \Delta a + K \sin c \sin a \Delta B \quad (2)$$

और, $\Delta c = \cos B \Delta a + \cos A \Delta b + K \sin a \sin b \Delta C \quad (3)$

से कम विलोपन आदि विधियों द्वारा दिये हुए प्रतिबन्धों के अन्तर्गत, त्रिभुज के किन्हीं भी दो, तीन, चार अवयवों के लघु विचरणों में सम्बन्ध स्थापित कर सकते हैं। इसलिए इन सम्बन्धों को विचरण के मूल सूत्र भी कहते हैं।

उदाहरण—यदि गोलीय त्रिभुज ABC में A और c अचर रहते हैं तो b C के लघु विचरणों में क्या सम्बन्ध होगा?

चूँकि A और c अचर हैं

$\therefore$ $\Delta A = 0, \ \Delta c = 0$

मूल सूत्र (1) और (3) में ये मान रखने पर,

$$\Delta a = \cos C \Delta b \quad \ldots \quad (i)$$

और, $0 = \cos B \Delta a + \cos A \Delta b + K \sin a \sin b \Delta C \quad \ldots \quad (ii)$

(i) और (ii) से,

$$0 = \cos B \cos C \Delta b + \cos A \Delta b + K \sin a \sin b \Delta C$$

या, $\Delta b (\cos A + \cos B \cos C) + \sin B \sin a \Delta C = 0$

$$\because \frac{\sin B}{\sin b} = K$$

सम्पूरक कोसाइन सूत्र से,

$$\Delta b\,(\sin B \sin C \cos a)+\sin B \sin a\,\Delta C=0$$

$$\therefore \quad \sin C\,\Delta\,b=-\tan a\,\Delta\,C$$

विविध उदाहरण

उदाहरण 1. यदि गोलीय त्रिभुज ABC में C और c अचर रहते हैं जबकि a और b में क्रमशः Δa और Δb की वृद्धि होती है तो सिद्ध करो कि

$$\frac{\Delta\,a}{\sqrt{(1-K^2\sin^2 a)}}+\frac{\Delta\,b}{\sqrt{(1-K^2\sin^2 b)}}=0, \text{ जबकि, } K=\frac{\sin A}{\sin a}$$

धारा (9·3.1) के मूल सूत्र (3) से,

$$\Delta c=\cos B\,\Delta a+\cos A\,\Delta b+K\sin a\sin b\,\Delta C$$

परन्तु C और c अचर हैं,

$$\therefore \quad \Delta C=\Delta c=0$$

$$\therefore \quad \cos B\,\Delta a+\cos A\,\Delta b=0$$

या,

$$\frac{\Delta a}{\sqrt{(1-\sin^2 A)}}+\frac{\Delta b}{\sqrt{(1-\sin^2 b)}}=0$$

या,

$$\frac{\Delta a}{\sqrt{(1-K^2\sin^2 a)}}+\frac{\Delta b}{\sqrt{(1-K^2\sin^2 b)}}=0,$$

$$\because \quad K=\frac{\sin A}{\sin a}$$

उदाहरण 2. यदि गोलीय त्रिभुज ABC इस प्रकार से थोड़ा विकृत किया जाये कि उसके कोणों का योग अचर बना रहे तो सिद्ध करो कि इस विकृति के परिणामस्वरूप उसकी भुजाओं की लम्बाई में जो लघु-विचरण होगा वह निम्नलिखित सम्बन्ध सन्तुष्ट करेगा।

$$\Delta a\sin(S-A)+\Delta b\sin(S-B)+\Delta c\sin(S-C)=0$$

जहाँ, $A+B+C=2S$ है।

$$A+B+C=2S=\text{अचर राशि} \quad \because \text{ दिया है।}$$

आंशिक अवकलन से,

$$\Delta A+\Delta B+\Delta C=0 \qquad . \; . \; . \quad \text{(i)}$$

धारा (9·3.1) के मूल सूत्रों में,

(1) $x \sin A+(2)\, x \sin B+(3)\, x \sin C$, क्रिया करने पर,

$$\begin{aligned}\Delta a \sin A+\Delta b \sin B+\Delta c \sin C &=(\cos C \sin A+\cos A \sin C)\, \Delta b+(\cos B \sin A+\\ &\quad \cos A \sin B)\, \Delta c+(\cos B \sin C+\cos C \sin B)\, \Delta a\\ &\quad +(K \sin b \sin c \sin A \Delta A+K \sin c \sin a \sin B \Delta B\\ &\quad +K \sin a \sin b \sin C \Delta C) \qquad . \; . \; . \quad \text{(ii)}\end{aligned}$$

परन्तु साइन सूत्र से,

$$\sin b \sin c \sin A=\sin c \sin a \sin B=\sin a \sin b \sin C \qquad . \; . \; . \quad \text{(iii)}$$

(iii) से (ii) में मान रखने पर,

$$\begin{aligned}&(\sin A-\cos B \sin C-\cos C \sin B)\, \Delta a\\ &\quad +(\sin B-\cos C \sin A-\cos A \sin C)\, \Delta b\\ &\quad +(\sin C-\cos B \sin A-\cos A \sin B)\, \Delta c\\ &=(K \sin a \sin b \sin C)\, (\Delta A+\Delta B+\Delta C)=0 \qquad \because \text{(i)}\end{aligned}$$

या, $$\begin{aligned}&\{\sin A-\sin (B+C)\}\Delta a+\{\sin B-\sin (A+C)\}\, \Delta b\\ &\quad +\{\sin C-\sin (A+B)\}\, \Delta c=0 \qquad . \; . \; . \quad \text{(iv)}\end{aligned}$$

परन्तु,

$$\begin{aligned}\sin A-\sin (B+C) &=2 \cos \tfrac{1}{2}(A+B+C)\, \sin \tfrac{1}{2}(A-B-C)\\ &=-2 \cos S \sin (S-A)\end{aligned}$$

इसी प्रकार,

$$\sin B-\sin (A+C)=-2 \cos S \sin (S-B)$$

और, $$\sin \{C-\sin (A+B)\}=-2 \cos S \sin (S-C)$$

$\therefore$ (iv) में ये मान रखने पर,

$$-2\cos S\sin(S-A)\,\Delta a-2\cos S\sin(S-B)\,\Delta b$$
$$-2\cos S\sin(S-C)\,\Delta C=0$$

या, $\sin(S-A)\,\Delta a+\sin(S-B)\,\Delta b+\sin(S-C)\,\Delta c=0$

उदाहरण 3. वे प्रतिबन्ध ज्ञात करो जिनके अन्तर्गत गोलीय त्रिभुज ABC को इस प्रकार विकृत किया जा सके कि $\Delta a=\Delta b=\Delta A=\Delta B=0$ हो और ΔC तथा Δc शून्य के बराबर न हो।

अर्थात्, गोलीय त्रिभुज ABC में इस प्रकार का परिवर्तन करना है कि अवयव a, b, A और B अचर बने रहें, केवल C और c में लघु विचरण हो।

धारा (9·3.1) के मूल सूत्र (1) से,

$$\Delta a=\cos C\,\Delta b+\cos B\Delta c+K\sin b\sin c\Delta A$$

दिये हुए प्रतिबन्धों से हमें प्राप्त होता है कि

$$0=0+\cos B\Delta c+0$$

परन्तु, $\Delta c\neq 0$ $\because$ दिया है।

$\therefore$ $\cos B=0$

$\therefore$ $B=\frac{\pi}{2}$ . . . . (i)

इसी प्रकार, मूल सूत्र (2) से हमें ज्ञात होता है कि

$$A=\frac{\pi}{2} \quad \text{. . . (ii)}$$

अब धारा (9·3), खंड (ब) के परिणाम (4) से,

$$\Delta A=-\cos c\Delta B-\cos b\Delta C+\frac{1}{K}\sin B\sin C\Delta a$$

$$0=0-\cos b\Delta C+0 \qquad \because \Delta A=\Delta B=\Delta a=0$$

और चूंकि, $\Delta C\neq 0$

$\therefore$ $\cos b=0$

$\therefore$ $b=\frac{\pi}{2}$ . . . (iii)

इसी प्रकार, धारा (9·3), खंड (ब) के परिणाम (5) से,

$$a=\frac{\pi}{2} \qquad \ldots \quad \text{(iv)}$$

अतः (i), (ii), (iii) और (iv) से, अभीष्ट प्रतिबन्ध

$$A=B=a=b=\frac{\pi}{2}$$

प्रश्न संग्रह 13

1. गोलीय त्रिभुज ABC में यदि b और c अचर रहते हैं तो, शेष अवयवों के लघु विचरणों के जोड़ों में निम्नलिखित सम्बन्ध स्थापित करो :

(i) $\tan C\Delta B=\tan B\Delta C$; (ii) $\cot C\Delta a+\sin a\Delta B=0$

(ii) $\Delta a=\sin c \sin B\Delta A$; (iv) $\sin B \cos C\Delta C -\sin A\Delta B=0$

2. गोलीय त्रिभुज ABC में यदि B और C अचर रहते हैं तो शेष अवयवों के लघु विचरणों के जोड़ों में निम्नलिखित सम्बन्ध स्थापित करो :

(i) $\Delta b \tan c=\Delta c \tan b$; (ii) $\Delta A \cot c=\Delta b \sin A$

(ii) $\sin B \cos c\Delta a=\sin A\Delta b$; (ii) $\Delta A=\sin b \sin C\Delta A$

3. गोलीय त्रिभुज ABC में यदि A और c अचर रहते हैं तो सिद्ध करो कि b और B के लघु-विचरणों में निम्नलिखित सम्बन्ध होता है,

$$\sin C\Delta b=\sin a\Delta B$$

[संकेत—क्रमागत अवयव b, A, c, B में कोटैन्जेन्ट सूत्र,

$$\cos A \cos c=\sin c \cot b-\sin A \cot B,$$

का दिये हुए प्रतिबन्धों के अन्तर्गत आंशिक अवकलन से अभीष्ट परिणाम प्राप्त करो ।]

4. किसी त्रिभुज ABC में सिद्ध करो कि

$$\cot A\,\Delta A+\cot b\Delta b=\cot a\Delta a+\cot B\Delta B$$

5. किसी गोलीय त्रिभुज ABC में इस प्रकार का थोड़ा परिवर्तन किया गया है कि अवयव a में Δa की लघुवृद्धि होती है परन्तु C और c अचर बने रहते हैं। परिवर्तन के परिणामस्वरूप शेष अवयवों के लघु-विचरणों का Δa से सम्बन्ध ज्ञात करो और त्रिभुज के क्षेत्रफल में संगत परिवर्तन ज्ञात करो ।

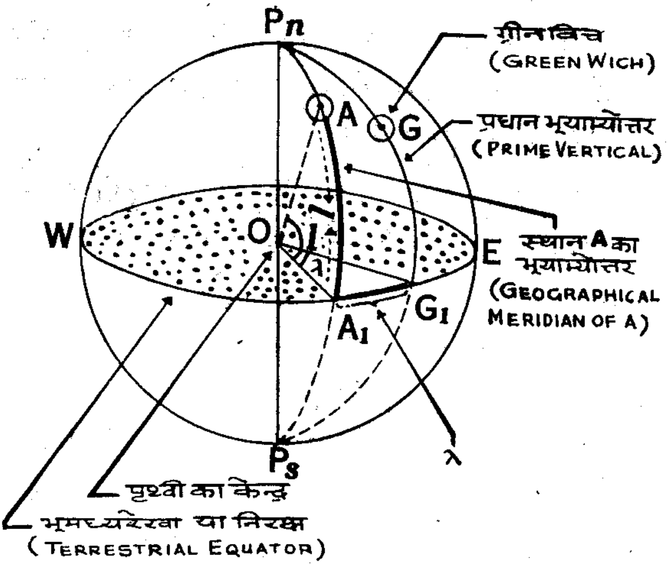
अध्याय 10

गोलीय त्रिकोणमिति के सरल अनुप्रयोग

(SIMPLE APPLICATIONS OF SPHERICAL TRIGONOMETRY)

10·1. पृथ्वी के धरातल पर

गणना की सुगमता के लिए सामान्यतः पृथ्वी को एक गोला माना है। मान लो गोले (पृथ्वी) का घूर्णन अक्ष (Axis of rotation) उसके पृष्ठ को P_n और P_s बिन्दुओं में काटता है। बिन्दु P_n और P_s क्रमशः पृथ्वी के उत्तर और दक्षिण ध्रुव कहलाते हैं। पृथ्वी की सतह पर स्थित दीर्घवृत्त, जिसका तल घूर्णन अक्ष के लम्बरूप होता है, या वह दीर्घवृत्त, जिसके ध्रुव P_n और P_s बिन्दु हैं, भूमध्य रेखा



आकृति 87

या निरक्ष (Terrestrial Equator) कहलाता है। पृथ्वी पर स्थित किसी स्थान (बिन्दु), A से जाने वाला, निरक्ष का द्वितीयक अर्धवृत्त अर्थात अर्ध-दीर्घवृत्त $P_n\ AP_s$ बिन्दु A का भूयाम्योत्तर (Geographical Meridian of A) कहलाता है। ग्रीनविच में स्थित खगोलीय वेधशाला (Astronomical observatory) से होकर जाने वाला निरक्ष का द्वितीयक, प्रधान भूयाम्योत्तर (Prime Vertical) कहलाता है।

10·1.1. अक्षांश और रेखांश (Latitude and Longitude)

अक्षांश—पृथ्वी के पृष्ठ पर स्थित किसी बिन्दु A और निरक्ष के बीच, A के याम्योत्तर पर नापी गयी गोलीय दूरी को बिन्दु A का अक्षांश कहा जाता है। आकृति में, समतल कोण AOA_1 या भूयाम्योत्तर चाप A_1A बिन्दु A का अक्षांश दर्शाता है। निरक्ष के उत्तर और दक्षिण में स्थित बिन्दुओं के अक्षांशों में भेद की दृष्टि से उन्हें क्रमशः अक्षांश (N) और अक्षांश (S) या $(+)$ और $(-)$ चिन्ह लगाकर दर्शाते हैं।

रेखांश—पृथ्वी पर स्थित किसी स्थान या बिन्दु का रेखांश, उस बिन्दु के भूयाम्योत्तर समतल और प्रधान भूयाम्योत्तर समतल के बीच (180° से कम) का कोण होता है। आकृति में गोलीय कोण $G_1P_nA_1$ या समतल कोण G_1OA_1 या निरक्ष पर, A और G (= Greenwich) के भूयाम्योत्तरों द्वारा काटा चाप G_1A_1, बिन्दु A का रेखांश दर्शाता है।

प्रधान याम्योत्तर के पूर्व और पश्चिम में स्थित बिन्दुओं के रेखांशों में भेद करने की दृष्टि से उन्हें क्रमशः रेखांश (E) और रेखांश (W) लिखते हैं।

प्रतीकों की भाषा में,

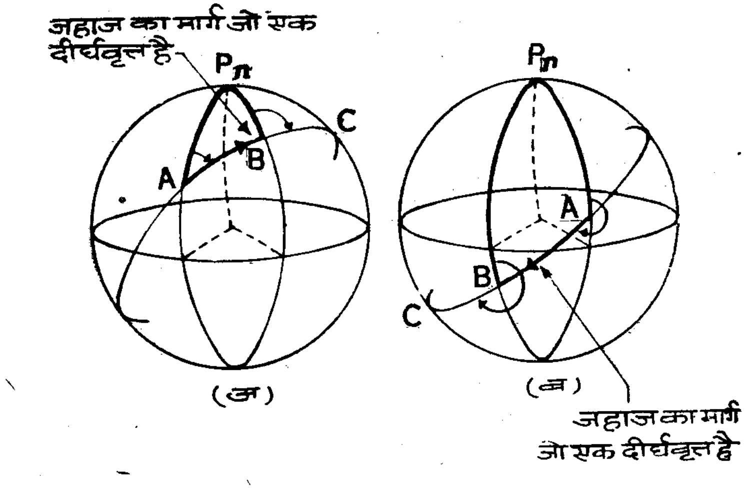
$$\text{अक्षांश} = l$$
$$\text{रेखांश} = \lambda$$

10·1.2. नौसंचालन

यदि एक जहाज पृथ्वी की सतह पर स्थित दो स्थानों के बीच, उनसे होकर जाने वाले दीर्घवृत्त के लघु चाप पर चलकर यात्रा करता है तो उसकी यात्रा को दीर्घवृत्त नौयात्रा (Great circle sailing) कहते हैं। पथ के किसी बिन्दु पर जहाज की मार्ग-दिशा (course) उसके पथ और उस बिन्दु के भूयाम्योत्तर के बीच का कोण होता है।

उदाहरण। मान लो, एक जहाज बिन्दु A से बिन्दु B तक दीर्घवृत्त मार्ग पर यात्रा करता है। आकृति (88–अ) में कोण P_nAB प्रारम्भिक मार्ग दिशा (A बिन्दु पर मार्ग दिशा) और कोण P_nBC लक्ष्य बिन्दु B पर मार्ग-दिशा दर्शाता है। यदि जहाज बिन्दु B से A तक दीर्घवृत्त मार्ग पर यात्रा करता है तो इस स्थित में आकृति (88–ब) में $\angle P_nAB$ और $\angle P_nAC$ प्रारम्भिक और लक्ष्य बिन्दु मार्ग-दिशा दर्शाते हैं।

यदि जहाज बिन्दु A से पूर्व या पश्चिम दिशा में यात्रा करके लक्ष्य बिन्दु B पर पहुँच जाये, अर्थात उसकी मार्ग-दिशा सदैव पूर्व या पश्चिम ही रहे तो हम कह सकते हैं कि जहाज का मार्ग एक लघुवृत्त है जिसका समतल निरक्ष के समतल के समानांतर है। इस स्थिति में नौयात्रा को समांतर नौयात्रा (Parallal sailing) कहते हैं।



आकृति 88

किसी भी प्रकार की नौयात्रा में यदि प्रारम्भिक मार्ग-दिशा और तय की हुई दूरी ज्ञात हो तो गोलीय त्रिकोणमिति के अनुप्रयोग से, हम लक्ष्य बिन्दु की स्थिति ज्ञात कर सकते हैं। और यदि प्रारम्भिक और लक्ष स्थितियों का ज्ञान हो तो उनके बीच की दूरी तथा उन बिन्दुओं पर मार्ग-दिशा ज्ञात कर सकते हैं। इस प्रकार के कुछ प्रश्नों को निम्नलिखित उदाहरणों में हल करके दिखाया गया है।

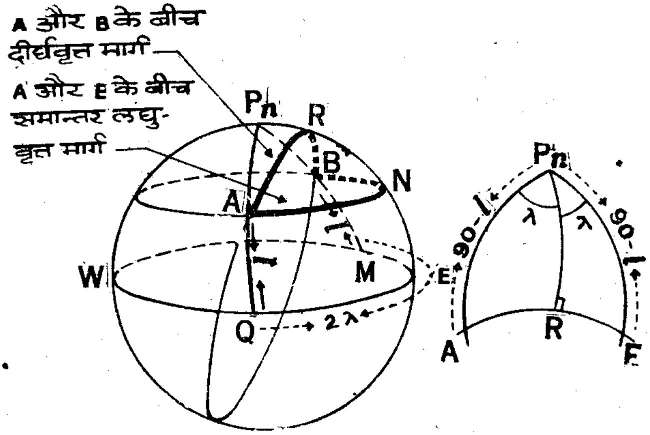
10·1.3. विविध उदाहरण

उदाहरण 1. (अ) पोर्ट A, जिसका अक्षांश l है, से एक जहाज पूर्व दिशा में यात्रा करके पोर्ट B पहुँचता है। यदि A और E के रेखांशों में 2λ का अन्तर है तो सिद्ध करो कि उनके बीच, उनसे होकर जाने वाले, निरक्ष के समांतर, लघु वृत्त पर दूरी $2\lambda\, r \cos l$ है। यहाँ r पृथ्वी की त्रिज्या दर्शाता है।

(ब) भाग (अ) में की गई यात्रा यदि A और B को मिलाने वाले दीर्घवृत्त पर की जाये तो सिद्ध करो कि

$$2r\{\lambda \cos l - \sin^{-1} (\sin \lambda \cos l)\}$$

यात्रा कम करनी पड़ेगी (अर्थात इतनी दूरी की बचत होगी।)।



आकृति 89

(अ) चूँकि जहाज पोर्ट A से पूर्व दिशा में यात्रा करके पोर्ट B पर पहुँचता है इसलिए A और B के अक्षांश बराबर होंगे अर्थात पोर्ट A और B लघुवृत्त ANB पर स्थित हैं जिसका समतल निरक्ष के समतल के समांतर और उससे l दूरी पर स्थित है। मान लो, P_n उत्तर ध्रुव है। P_nAQ और P_nBM दीर्घ वृत्त खींचो जो निरक्ष को Q और M बिन्दुओं पर काटते हैं।

अतः $$AQ = BM = l$$

$$\text{गोलीय कोण } QP_nM = 2\lambda \text{ रेडियन}$$

या, $$\text{चाप } QM = 2\lambda\, r,$$

(जबकि r पृथ्वी की त्रिज्या)

धारा (2·10) से,

$$\text{लघुवृत्त चाप } ANB = \text{दीर्घवृत्त चाप } QM \cos AQ$$
$$= 2\lambda r \cos l \quad . \; . \; . \quad \text{(i)}$$

(ब) A और B से होकर जाने वाला दीर्घवृत्त ARB खींचो। आकृति से स्पष्ट है कि बिन्दु A, P_n और B गोलीय त्रिभुज AP_nB की रचना करते हैं जबकि भुजा AB = दीर्घवृत्त चाप ARB है। (क्योंकि A और B को यदि लघु वृत्त चाप ANB द्वारा मिलाया जाये तो गोलीय त्रिभुज की परिभाषा सन्तुष्ट नहीं होती)। अतः

गोलीय त्रिभुज AP_nB में

$$P_nA = P_nB = 90 - l$$
$$\angle AP_nB = 2\lambda$$

$\therefore$ त्रिभुज AP_nB एक समद्विबाहु गोलीय त्रिभुज है।

शीर्ष बिन्दु P_n से आधार AB पर P_nR लम्ब डाला। स्पष्ट है कि बिन्दु R, AB का मध्य बिन्दु है।

अब समकोण गोलीय त्रिभुज P_nRA, $R = 90°$ में नैपियर द्वितीय नियम से,

$$\sin AR = \cos \{90 - (90 - l)\} \cos (90 - \lambda)$$
$$= \sin \lambda \cos l$$

$$\therefore \quad AR = \sin^{-1} (\sin \lambda \cos l) \text{ रेडियन}$$

$$\text{और,} \quad AB = 2r \sin^{-1} (\sin \lambda \cos l) \quad . \; . \; . \quad \text{(ii)}$$

यात्रा की बचत = (दीर्घवृत्त पर AB दूरी — समांतर लघुवृत्त पर AB दूरी)

$$= 2\, r\lambda \cos l - 2r \sin^{-1} (\sin \lambda \cos l)$$

$\because$ खंड (अ) (i) और खंड (ब) (ii)

$$= 2r \{\lambda \cos l - \sin^{-1} \sin \lambda \cos l\}$$

उदाहरण 2. एक जहाज की यात्रा के प्रारम्भिक और लक्ष्य बिन्दुओं पर मार्ग-दिशा और बीच की दूरी ज्ञात करो जबकि यात्रा दीर्घवृत्त मार्ग पर की गई हो तथा प्रारम्भिक और लक्ष्य बिन्दुओं के अक्षांश क्रमशः 42° (N), 18°(N) और रेखांश क्रमशः 57°52′, 107°52′ हैं।

मान लो, प्रारम्भिक बिन्दु A और लक्ष्य बिन्दु B है। चूँकि दोनों बिन्दु उत्तरी गोलार्ध में हैं अतः इन्हें उत्तरी ध्रुव $P_n = C$ से दीर्घवृत्त चापों द्वारा, आकृति में

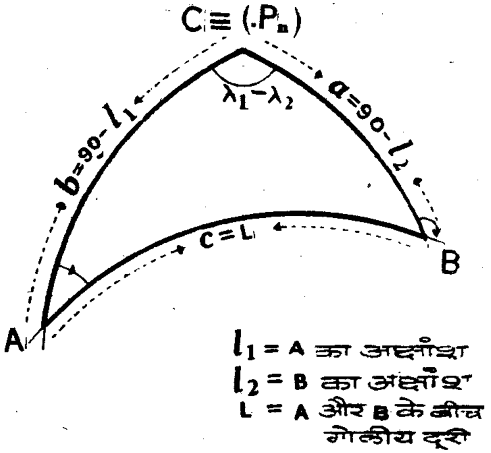
दर्शाये अनुसार मिला कर, गोलीय त्रिभुज ABC बनाओ।

त्रिभुज ABC में,

$$AC = b = 90 — (A \text{ का अक्षांश})$$
$$= 90° — 42°$$
$$= 48°$$

$$BC = a = 90° — (B \text{ का अक्षांश})$$
$$= 90° — 18° = 72°$$

और,
$$C = 157° \, 52' — 107° \, 52'$$
$$= 50°$$



आकृति 90

धारा (6·3.2), उदाहरण 2, में हमने इस त्रिभुज का निर्धारण किया है जिसके परिणाम स्वरूप,

$$A = 103° \, 50'5'', \; B = 49° \, 21'5'' \; c = 48° \, 37' \, 4''$$

A और B के बीच की दूरी $= 48° \, 37'4'' = 2917 . 06$ समुद्री मील

जबकि $1' = 1$ समुद्री मील

उदाहरण 3. R त्रिज्या के गोले पर खींचे गए दीर्घवृत्त पर स्थित दो बिन्दुओं के बीच की दूरी L है। यदि l_1 और l_2 उन बिन्दुओं के अक्षांश तथा λ_1 और λ_2 रेखांश हैं तो सिद्ध करो कि

(अ) $$L = R\cos(\sin l_1 \sin l_2 \sin^2\phi)$$

जबकि, $$\tan^2\phi = \cot l_1 \cot l_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2)$$

(ब) बिन्दुओं को मिलाने वाले दीर्घवृत्त के उच्चतम बिन्दु का अक्षांश ज्ञात करो।

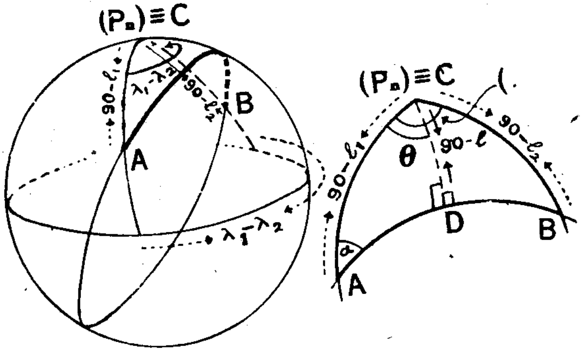
मान लो, बिन्दु A और B एक दीर्घवृत्त पर स्थित हैं।

$$\text{चाप } AB = \frac{L}{R}$$

ध्रुव P_n को C मानने पर गोलीय त्रिभुज ABC में,

$$AB = \frac{L}{R}, \; AC = 90 - l_1, \; BC = 90 - l_2$$

और $$\angle ACB = (\lambda_1 - \lambda_2)$$



आकृति 91

कोसाइन सूत्र में उपर्युक्त मान रखने पर,

$$\cos AB = \cos AC \cos BC + \sin AC \sin BC \cos C$$

या, $$\cos\frac{L}{R} = \cos(90 - l_1)\cos(90 - l_2) + \sin(90 - l_1) \times \sin(90 - l_2)\cos(\lambda_1 - \lambda_2).$$

$$= \sin l_1 \sin l_2 + \cos l_1 \cos l_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2)$$

या, $$\cos\frac{L}{R} = \sin l_1 \sin l_2 \{1 + \cot l_1 \cot l_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2)\}$$

परन्तु, $$\tan^2\phi = \cot l_1 \cot l_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2)$$

$$\therefore \quad 1+\cot l_1 \cot l_2 \cos(\lambda_1-\lambda_2)=1+\tan^2\phi=\sec^2\phi$$

$$\therefore \quad \cos\frac{L}{R}=\sin l_1 \sin l_2 \sec^2\phi$$

या,
$$L=R\cos^{-1}\{\sin l_1 \sin l_2 \sec^2\phi\}$$

(ब) दीर्घवृत्त AB का उच्चतम बिन्दु वह बिन्दु होगा जिसे ध्रुव से मिलाने वाला चाप दीर्घवृत्त AB पर लम्ब हो। अतः मान लो उच्चतम बिन्दु D है तो,

$$\angle ADC=90^\circ$$

मान लो l, बिन्दु D का अक्षांश है

$$\therefore \quad \text{चाप } CD=(90-l)$$

अब समकोण गोलीय त्रिभुज $ADC, D=90^\circ$ में, साइन सूत्र से,

$$\frac{\sin(90-l_1)}{\sin 90}=\frac{\sin CD}{\sin \alpha}=\frac{\sin(90-l)}{\sin\alpha}$$

$$\therefore \quad \cos l=\cos l_1 \sin\alpha \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

$\sin\alpha$ का मान निकालने के लिए, त्रिभुज ABC में, साइन सूत्र से,

$$\frac{\sin(90-l_2)}{\sin\alpha}=\frac{\sin\frac{L}{R}}{\sin(\lambda_1-\lambda_2)}$$

$$\therefore \quad \sin\alpha=\cos l_1 \cos l_2 \sin(\lambda_1-\lambda_2)\operatorname{cosec}\frac{L}{R} \quad \text{(ii)}$$

(i) और (ii) से,

$$\cos l=\cos l_1 \cos l_2 \sin(\lambda_1-\lambda_2)\operatorname{cosec}\frac{L}{R}$$

$$\therefore \quad l=\cos^{-1}\left\{\cos l_1 \cos l_2 \sin(\lambda_1-\lambda_2)\operatorname{cosec}\frac{L}{R}\right\}$$

(ब) के लिए विकल्प विधि (अवकलन-विधि)

मान लो, आकृति (91) में

A और B बिन्दुओं को मिलाने वाले दीर्घवृत्त पर स्थित किसी बिन्दु D का अक्षांश l है।

$\therefore \qquad CD=90-l$

मान लो, $\qquad \angle ACD=\theta$

और $\qquad \angle CAD=a$

अब त्रिभुज ACD में, कोटैन्जेन्ट सूत्र से,

$$\cos(90-l_1)\cos\theta=\sin(90-l_1)\cot(90-l)-\sin\theta\cot a$$

या, $$\sin l_1\cos\theta=\cos l_1\tan l-\sin\theta\cot a \quad \ldots \text{(i)}$$

आकृति में हम देखते हैं कि θ का मान बदलने से l का मान भी बदलता है। इसलिए l के अधिकतम मान के लिए $\frac{\Delta l}{\Delta\theta}=0$ होगा। अतः (i) में l_1 और a को अचर मानकर आंशिक अवकलन करके, $\frac{\Delta l}{\Delta\theta}=0$ रखने पर,

$$-\sin\theta\sin l_1=-\cos\theta\cot a$$

$$\therefore \qquad \tan\theta=\frac{\cot a}{\sin l_1}$$

$$\therefore \qquad \sin\theta=\frac{\cot a}{\sqrt{(\cot^2 a+\sin^2 l_1)}} \quad \ldots \text{(ii)}$$

और $$\cos\theta=\frac{\sin l_1}{\sqrt{(\cot^2 a+\sin^2 l_1)}} \quad \ldots \text{(iii)}$$

अर्थात, l के अधिकतम मान के लिए, $\sin\theta$ और $\cos\theta$ के मान (ii) और (iii) से मिलते हैं। इन मानों को (i) में रखने से,

$$\cos l_1\tan l=\sin l_1\frac{\sin l_1}{\sqrt{(\cot^2 a+\sin^2 l_1)}}$$
$$+\cot a\frac{\cot a}{\sqrt{(\cot^2 a+\sin^2 l_1)}}$$
$$=\sqrt{(\cot^2 a+\sin^2 l_1)}$$

$$\therefore \qquad \tan l=\frac{\sqrt{(\cot^2 a+\sin^2 l_1)}}{\cos l_1}$$

$$\therefore \qquad \cos l = \frac{\cos l_1}{\sqrt{(\cos^2 l_1+\sin^2 l_1+\cot^2 a)}}$$

$$= \frac{\cos l_1}{\sqrt{(1+\cot^2 a)}}$$

$$= \cos l_1 \sin a$$

आगे की क्रिया प्रथम विधि के समान है।

प्रश्न संग्रह 14

1. पोर्ट A से, जिसका अक्षांश 42° N है, एक जहाज पश्चिम की ओर चलता है। यदि पोर्ट B तक पहुँचने में उसका रेखांश 3°45′ से परिवर्तित होता है तो A और B के बीच की दूरी ज्ञात करो। (जबकि $1' = 1$ समुद्री मील $=$ 6080 फीट)

2. एक जहाज पश्चिम की ओर, 35° (N) अक्षांश के समांतर लघु वृत्त पर यात्रा करता है। यदि उसने 160 समुद्री मील तय की तो ज्ञात करो कि उसके रेखांश में कितना परिवर्तन हुआ।

3. एक जहाज प्रारम्भिक मार्ग-दिशा 36° में, पोर्ट A (अक्षांश 40°48′ 36″ (N); रेखांश 73°37′30″ (W) से दीर्घवृत्त नौ-यात्रा प्रारम्भ करता है। 500 समुद्री मील की यात्रा करके वह पोर्ट B पर पहुँचता है।

(अ) पोर्ट B के अक्षांश और रेखांश ज्ञात करो।

(ब) पृथ्वी के पृष्ठ पर जहाज के मार्ग के उच्चतम स्थान के अक्षांश और रेखांश ज्ञात करो।

4. एक जहाज पोर्ट A (अक्षांश 53°53′(N); रेखांश 166°35′ (W) से पोर्ट B (अक्षांश 37°50′(S); रेखांश 144°59′ (E) तक दीर्घवृत्त मार्ग पर यात्रा करता है।

(अ) पोर्टों के बीच की दूरी ज्ञात करो।

(ब) प्रारम्भिक और अंतिम मार्ग-दिशा ज्ञात करो।

(स) मार्ग और निरक्ष के कटन बिन्दु के अक्षांश, रेखांश, बिन्दु A से दूरी और इस बिन्दु पर मार्ग-दिशा ज्ञात करो।

5. सिद्ध करो कि गोले पर स्थित दो बिन्दु, $A(l_1, \lambda_1)$ और $B(l_2, \lambda_2)$, की गोलीय दूरी

$$\delta=\cos^{-1}\{\sin l_1 \sin l_2+\cos l_1 \cos l_2 \cos(\lambda_1-\lambda_2)\}$$

होती है ।

6. सिद्ध करो कि दो याम्योत्तरों के बीच, जिनका रेखांश अन्तर 2λ है, समांतर-अक्षांश-लघु वृत्त पर यात्रा करने के बदले यदि दीर्घवृत्त पथ से यात्रा की जाये तो सिद्ध करो कि अधिकतम दूरी की बचत,

$$l=\cos^{-1}\sqrt{\left(\operatorname{cosec}^2\lambda-\frac{1}{\lambda^2}\right)}$$

अक्षांश पर होती है ।

[संकेत—उदाहरण 1, खंड (ब) से, अक्षांश l पर

यात्रा की बचत $=\delta=2r\{\lambda\cos l-\sin^{-1}(\sin\lambda\cos l)\}$

अब, δ का मान अधिकतम होगा जब $\dfrac{\Delta\delta}{\Delta l}=0$

चूंकि अक्षांश के किस मान के लिए यह बचत अधिकतम होगी यह ज्ञात करना है । अर्थात यहाँ l चर राशि है ।

$$\therefore \qquad 2r\left\{-\lambda\sin l-\frac{-\sin\lambda\sin l}{\sqrt{(1-\sin^2\lambda\cos^2 l)}}\right\}=0$$

या, $$2r\sin l\left\{\frac{\sin\lambda}{\sqrt{(1-\sin^2\lambda\cos^2 l)}}-\lambda\right\}=0$$

परन्तु न तो r शून्य है और न ही $\sin l=0$ हो सकता है क्योंकि यदि $l=0$ है तो यात्रा निरक्ष पर होगी, लघु वृत्त का प्रश्न ही नहीं उठता ।

$$\therefore \qquad \frac{\sin\lambda}{\sqrt{(1-\sin^2\lambda\cos^2 l)}}-\lambda=0$$

या, $$l=\cos^{-1}\sqrt{(\operatorname{cosec}^2\lambda-\frac{1}{\lambda^2})}\Big]$$

7. सिद्ध करो कि एक ही भूयाम्योत्तर पर स्थित दो समान अक्षांश वाले स्थानों के बीच समांतर लघु वृत्त मार्ग से यात्रा के स्थान पर दीर्घ मार्ग से यात्रा करने में अधिकतम,

$$a\left\{2\sin^{-1}\frac{2}{\pi}-\pi+\sqrt{(\pi^2-4)}\right\}$$

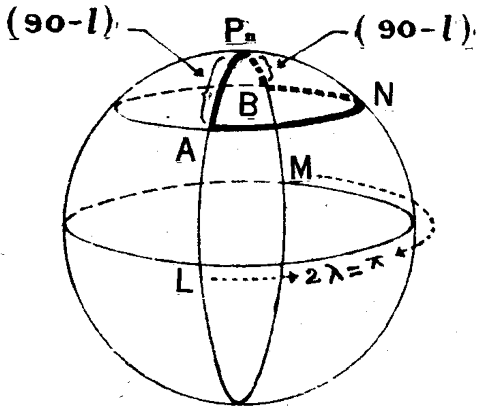
दूरी की बचत की जा सकती है । यहाँ a, पृथ्वी की त्रिज्या दर्शाता है ।

[संकेत—आकृति के दर्शाये अनुसार, स्थान A और B एक ही याम्योत्तर LP_nM पर स्थित हैं। मान लो उसका उभयनिष्ठ अक्षांश l है तो उनके बीच समांतर अक्षांश लघु वृत्त मार्ग ANB है और दीर्घ वृत्त मार्ग AP_nB है। इस स्थिति में A और B के रेखांशों का अन्तर $2\lambda = LM = \pi$ है। प्रश्न 6 से अधिकतम बचत का अक्षांश,

$$l = \cos^{-1} \sqrt{\left(\operatorname{cosec}^2 \lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)}$$

इसलिए, $$\lambda = \frac{\pi}{2}$$

के लिए $$\sin l = \frac{2}{\pi}$$



आकृति 92

उदाहरण 1 खंड (ब) के परिणाम यह मान रखने से यात्रा में अधिकतम बचत

$$= 2a\{\lambda \cos l - \sin^{-1}(\sin \lambda \cos l)\}$$

$$= 2a\left\{\frac{\pi}{2}\sqrt{(1-\sin^2 l)} - \sin^{-1}\sqrt{(1-\sin^2 l)}\right\}$$

$$= a\left\{2\sin^{-1}\frac{2}{\pi} - \pi + \sqrt{(\pi^2 - 4)}\right\}]$$

8. एक जहाज अपने दीर्घ मार्ग पर एक समान चाल से यात्रा कर रहा है। यदि समान समयांतरालों के बाद प्रेक्षित अक्षांशों के मान l_1, l_2, l_3 हैं और प्रत्येक समयांतराल में तय की गई दूरी s है तो सिद्ध करो कि

$$s = r\cos^{-1}\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(l_1+l_2)\cos\frac{1}{2}(l_1-l_3)}{\sin l_2}\right]$$

जहाँ r पृथ्वी की त्रिज्या दर्शाता है।

9. एक पोर्ट का अक्षांश $l(N)$ और रेखांश $\lambda(E)$ है। सिद्ध करो कि इस पोर्ट से δ दूरी पर, निरक्ष पर स्थित, स्थानों के रेखांशों का अन्तर

$$2\cos^{-1}(\cos\delta\sec l)$$ है।

10. एक जहाज निरक्ष के किसी बिन्दु से दीर्घवृत्त मार्ग, जो निरक्ष से 45° का कोण बनाता है, पर यात्रा प्रारम्भ करता है। जब उसका अक्षांश $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ के बराबर हो जाता है तो सिद्ध करो कि उसके रेखांश में 32° का परिवर्तन हुआ है।

11. समान अक्षांश ϕ वाले दो बिन्दुओं के रेखांश का अन्तर 2λ है। सिद्ध करो कि इन बिन्दुओं से होकर जाने वाले दीर्घ वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु का

$$\tan^{-1}(\tan\phi\sec\lambda)$$

अधिकतम अक्षांश हो सकता है।

12. पृथ्वी के तल पर दो बिन्दु इस प्रकार स्थित हैं कि उनमें से एक की ध्रुव से दूरी और दूसरे की निरक्ष से लम्ब दूरी p है। यदि इन बिन्दुओं के रेखांशों का अन्तर ψ है तो सिद्ध करो कि उनके बीच कोणीय दूरी

$$\cos^{-1}(\sin 2p\cos^2\tfrac{1}{2}\psi)$$ है।

उत्तर

1. समुद्री मील 167.2।

2. 195′ 18″,

   अक्षांश = 63°35′6″ (N),

   रेखांश = 9°21′30″ (W).

4. (अ) 6045.5 समुद्री मील।
   (ब) प्रारम्भिक मार्ग दिशा $= 216°58'36''$.
   अंतिम मार्ग दिशा $= 206°40'24''$.
   (स) कटन बिन्दु अक्षांश $= 0°$, रेखांश $= 197°53'30''$ (W) या $162°6'30''$ (E), बिन्दु A से दूरी $= 3585.7$ समुद्री मील; मार्ग दिशा $= 200°45'54''$.

10·2. खगोल विज्ञान में अनुप्रयोग (Applications in Astronomy)

खगोल-विज्ञान का विद्यार्थी जानता है कि गोलीय त्रिकोणमिति खगोल-विज्ञान का एक अभिन्न अंग है। इस परिच्छेद में हम उदाहरण के रूप में, गोलीय त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोगों का अध्ययन करेंगे जो खगोल-विज्ञान का अध्ययन करते समय सहायक और महत्वपूर्ण सिद्ध होते हैं।

10·2.1. खगोलीय गोला (The celestial sphere)

पृथ्वी की सतह पर खड़े प्रेक्षक को ऐसा प्रतीत होता है कि वह एक अनन्त त्रिज्या वाले गोले के केन्द्र पर खड़ा है और उस गोले की सतह पर अनन्त खगोलीय पिंड (ग्रह और तारे) पूर्व से पश्चिम को ओर यात्रा कर रहे हैं। अतः एक ऐसे गोले की कल्पना की गई जिसका केन्द्र पृथ्वी का केन्द्र है और जिसकी अनन्त त्रिज्या है। इस प्रकार के कल्पित गोले को खगोलीय गोला (celestial sphere) कहते हैं। पृथ्वी और किसी खगोलीय पिंड के केन्द्रों को मिलाने वाली सरल रेखा जिस बिन्दु पर खगोलीय गोले को छेदती है वह बिन्दु गोले पर उस पिंड का प्रतीक माना जाता है। व्यावहारिक ज्ञान और गणनाओं में इस प्रतीक बिन्दु को ही हम खगोलीय पिंड मानते हैं। अर्थात हम सारे खगोलीय पिंडों को इस गोले की सतह पर स्थित मानकर चलते हैं जबकि हम अच्छी तरह जानते हैं कि विभिन्न पिंड पृथ्वी से विभिन्न दूरियों पर स्थित हैं। गोले पर पिंड का स्थान निश्चित करने के लिए खगोल विज्ञान में हम पढ़ेंगे कि कुछ स्थिर बिन्दु और दीर्घवृत्तों की आवश्यकता होती है। इसके लिए विभिन्न निर्देशांक पद्धतियाँ हैं। इनका विधिवत् विस्तृत अध्ययन हम खगोल-विज्ञान में करेंगे परन्तु यहाँ संक्षेप में उनका उल्लेख करना आवश्यक है।

10·2.2. खगोलीय गोले पर कुछ बिन्दु और दीर्घवृत्त

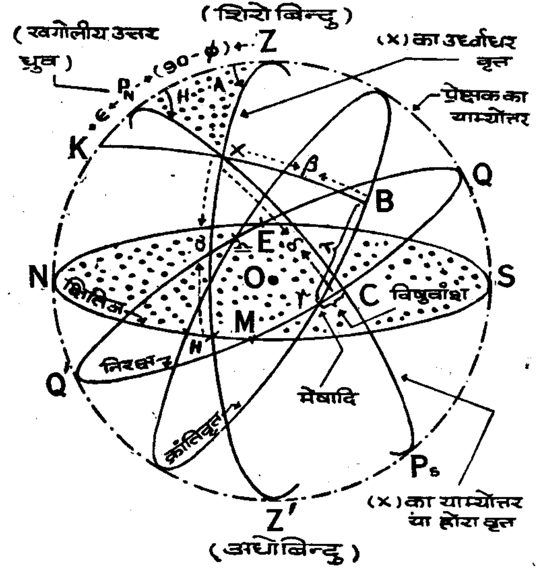
(अ) ऐसे बिन्दु और दीर्घवृत्त, जो प्रेक्षक से स्वतन्त्र हैं; अर्थात प्रेक्षक के पृथ्वी पर स्थान बदलने से जिनमें कोई परिवर्तन नहीं होता।

1. खगोलीय ध्रुव : PN और PS (The Celestial Poles)

पृथ्वी का घूर्णन-अक्ष (Axis of rctation) जिन दो बिन्दुओं में खगोलीय गोले को छेदता है वे बिन्दु खगोलीय ध्रुव कहलाते हैं।

2. खगोलीय निरक्ष : $EQWQ'$ (The Celestial Equator)

पृथ्वी के निरक्ष का समतल जिस दीर्घवृत्त में खगोलीय गोले को काटता है उसे खगोलीय निरक्ष कहते हैं।



आकृति 93

3. खगोलीय याम्योत्तर (The Celestial Meridian)

खगोलीय ध्रुवों (PN और PS) से होकर जाने वाले अर्धदीर्घवृत्त खगोलीय याम्योत्तर कहलाते हैं।

(ब) बिन्दु और दीर्घवृत्त जो पृथ्वी पर प्रेक्षक के स्थान पर निर्भर रहते हैं।

1. शिरोबिन्दु और अधोबिन्दु (Zenith & Nadir) Z और Z'—गोले पर प्रेक्षक के ठीक ऊपर बिन्दु Z, प्रेक्षक का शिरोबिन्दु कहलाता है। इसका प्रतिमुख बिन्दु Z', प्रेक्षक का अधोबिन्दु कहलाता है।

2. प्रेक्षक का खगोलीय क्षितिज (Observer's Horizon) $NESW$

खगोलीय गोले का वह दीर्घवृत्त जिसके ध्रुव Z और Z' हैं प्रेक्षक का खगोलीय क्षितिज या केवल क्षितिज कहलाता है।

3. प्रेक्षक का खगोलीय याम्योत्तर (Observer's Meridian) $P_N ZPS$

Z बिन्दु से होकर जाने वाला खगोलीय याम्योत्तर $P_N ZPS$ प्रेक्षक का याम्योत्तर कहलाता है। प्रेक्षक का याम्योत्तर, क्षितिज को N और S बिन्दुओं में काटता है जो क्षितिज पर प्रेक्षक की उत्तर और दक्षिण दिशा दर्शाते हैं।

(स) खगोलीय पिंड (X) से सम्बन्धित बिन्दु और दीर्घवृत्त इत्यादि।

1. पिंड X का उर्ध्वाधर वृत्त (Vertical Circle of X) $ZXHZ'$

Z और X बिन्दुओं से खींचा गया दीर्घवृत्त जो क्षितिज को H बिन्दु पर काटता है।

2. X का उन्नतांश (Altitude of X): $XH=a$—क्षितिज से पिंड X की लम्ब दूरी XH, पिंड का उन्नतांश कहलाता है। क्षितिज के ऊपर स्थित पिंडों के उन्नतांश (+) और नीचे स्थित पिंडों के उन्नतांश (—) चिन्ह के साथ दर्शाये जाते हैं।

3. X की शिरोबिन्दु दूरी (Zenith Distance) Z

$$\begin{aligned} Z &= 90-(X \text{ का उन्नतांश}) \\ &= 90-a \end{aligned}$$

4. X का दिगंश (Azimuth of X) $\angle P_N ZX=A$—प्रेक्षक के याम्योतर और X के उर्ध्वाधर वृत्त के बीच का कोण $P_N ZX$, X का दिगंश कहलाता है। सामान्यतः इसे क्षितिज के N बिन्दु से, E बिंदु की ओर से, H बिंदु तक के चाप द्वारा नापते हैं। अतः पूर्वाकाश में स्थित पिंडों के दिगंश 180° से कम और पश्चिम आकाश में स्थित पिंडों के दिगंश 180° से अधिक होते हैं।

5. X-का होरा वृत्त (Hour circle of X) $P_N XCP_S$,

जहाँ C निरक्ष पर इसका कटन बिन्दु है।

6. X का डेक्लिनेशन (Declination of X) $CX=\delta$

निरक्ष से पिंड की लम्ब दूरी, CX पिंड का डेक्लिनेशन कहलाता है। पिंड जब P_N वाले गोलार्द्ध में होता है तब उसका डेक्लिनेशन (+) चिन्ह द्वारा दर्शाते हैं और जब P_S वाले गोलार्ध में होता है तब डेक्लिनेशन (—) चिन्ह द्वारा दर्शाया जाता है।

7. X की ध्रुवीय दूरी P_NX या P_SX :

$$P_NX=(90-X \text{ का डेक्लिनेशन})$$
$$=90-\delta$$

8. X का होरा कोण (Hour angle of X) : $H=\angle ZP_NX$ —

प्रेक्षक के याम्योतर और पिंड X के होरा वृत्त के बीच का कोण, X का होरा कोण कहलाता है। होरा कोण को प्रेक्षक के याम्योतर से पश्चिम दिशा में 0° से 360° तक नापते हैं। निरक्ष के बिन्दु Q से पश्चिम दिशा में, C बिन्दु तक का चाप QC, पिंड X के होरा कोण का माप है।

पृथ्वी के घूर्णन के कारण खगोलीय पिंड X का होरा वृत्त प्रत्येक घन्टे में 15° बदलता रहता है। अतः होरा कोण को हम समय की इकाई में भी नाप सकते हैं।

9. X का राइट-असेन्शन (विषुवांश) (Right ascension of X): $\Upsilon C=\alpha$।

मेषादि (First point of Aries), ♈ जो निरक्ष और क्रान्ति वृत्त (Ecliptic) का एक कटन बिंदु होता है, और C बिंदुओं के बीच की दूरी, X का राइट-असेन्शन (α) कहलाती है। राइट-असेन्शन को ♈ बिन्दु से, E की ओर C बिन्दु तक के चाप की लम्बाई द्वारा 0° से 360° तक नापते हैं।

10. X के खगोलीय अक्षांश और रेखांश (Astronomical Latitude and Longitude of X) : $XB=\beta$, $\Upsilon B=\lambda$।

क्रांति वृत्त से पिंड की लम्ब दूरी, XB पिंड का खगोलीय अक्षांश और बिन्दु B की मेषादि ♈ से कोणीय दूरी को (जिसे चाप ΥB द्वारा नापते है), पिंड का खगोलीय रेखांश कहते हैं। खगोलीय रेखांश पूर्व की ओर 0° से 360° तक नापा जा सकता है।

10·2.3. निर्देशांक पद्धतियाँ (Coordinate systems)

1. क्षैतिज निर्देशांक पद्धति (उन्नतांश और दिगंश):—

इस पद्धति में प्रेक्षक का क्षितिज, और पिंड से जाने वाला क्षितिज का द्वितीयक, निर्देशाक्ष होते हैं तथा बिन्दु N मूल बिन्दु होता है। X के निर्देशांक : (उन्नतांश $=HX=a$ और दिगंश $=\angle P_N ZX=A$) या (a, A) ।

2. निरक्षीय निर्देशांक पद्धतियाँ

(अ) होरा कोण और डेक्लिनेशन

इस पद्धति में खगोलीय निरक्ष और प्रेक्षक का याम्योतर निर्देश-अक्ष होते हैं तथा निरक्ष और प्रेक्षक के याम्योतर का कटन बिन्दु Q, मूल बिन्दु होता है ।

X के निर्देशांक : (होरा कोण $=\angle ZP_N X=H$ और

डेक्लिनेशन $=CX=\delta$)

या, (H, δ)

(ब) राइट असेन्शन (विषुवांश) और डेक्लिनेशन

इस पद्धति में खगोलीय निरक्ष और डेक्लिनेशन वृत्त (पिंड X से जाने वाला, निरक्ष का द्वितीयक) निर्देश-अक्ष होते हैं तथा मेषादि Υ, मूल बिन्दु होता है ।

X के निर्देशांक : (राइट असेन्शन $=\Upsilon C=\alpha$ और

डेक्लिनेशन $=CX=\delta$)

या, (α, δ)

3. खगोलीय अक्षांश और रेखांश निर्देशांक पद्धति

इस पद्धति में क्रान्ति वृत्त और पिंड X से जाने वाला क्रान्ति वृत्त का द्वितीयक, निर्देशाक्ष होते हैं तथा मेषादि Υ, मूल बिन्दु होता है ।

X के निर्देशांक : (खगोलीय अक्षांश $=BX=\beta$ और

खगोलीय रेखांश $=\Upsilon B=\lambda$)

या, (β, λ)

10·2.4. खगोलीय त्रिभुज

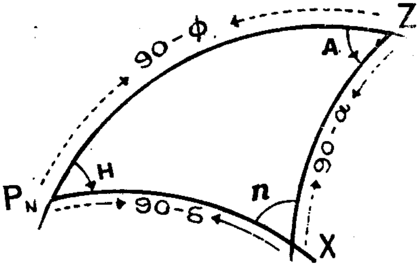
किसी पिंड X से सम्बन्धित निम्न दो प्रमुख खगोलीय त्रिभुज होते हैं ।

1. खगोलीय त्रिभुज $P_N Z X$ यह त्रिभुज निम्नलिखित तीन दीर्घवृत्तों के कटन बिन्दुओं द्वारा बनता है ।

(i) प्रेक्षक का याम्योत्तर, $P_N Z$

(ii) होरा वृत्त, $P_N X$

(iii) उर्ध्वाधर वृत्त, ZX



आकृति 94

त्रिभुज $P_N Z X$ के अवयव

(1) भुजा $XZ = X$ की शिरोबिन्दु दूरी $= 90 - X$ का उन्नतांश
$= (90 - a)$

(2) भुजा $XP_N = X$ की ध्रुवीय दूरी $= 90 - (X$ का डेक्लिनेशन$)$
$= (90 - \delta)$

(3) भुजा $ZP_N =$ ध्रुव की शिरोबिन्दु दूरी
$= 90 -$ (ध्रुव का उन्नतांश)
$= 90 -$ (प्रेक्षक का अक्षांश) (उत्तरी गोलार्ध में)
$= 90 - \phi$
या, $= 90 + \phi$, (दक्षिणी गोलार्ध में)

(4) कोण $P_N Z X = X$ का दिगंश (जब X, प्रेक्षक के याम्योत्तर के पूर्व में है ।)
$= A$
$= (360° - A)$ (जब X, प्रेक्षक के याम्योत्तर के पश्चिम में है)

(5) कोण $\angle ZP_NX = X$ का होरा कोण

$= H$ (जब X, प्रेक्षक के याम्योत्तर के पश्चिम में है)

$= (360° - H)$ (जब प्रेक्षक के याम्योत्तर के पूर्व में है)

(6) कोण $\angle ZXP_N =$ दिग्भेद कोण (Parallactic angle)

$=$ ध्रुव और शिरोबिन्दु को मिलाने वाले चाप द्वारा पिंड पर अंतरित कोण

$= \eta$

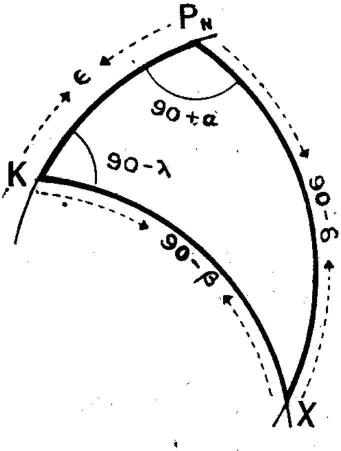
2. दूसरा प्रमुख खगोलीय त्रिभुज KP_NX है।

अवयव

(1) भुजा $KP_N =$ क्रान्ति वृत्त की तिर्यकता (Obliquity of the Ecliptic)

$=$ निरक्ष और क्रान्ति वृत्त के बीच का स्थिर कोण

$= \epsilon \, (= 23°27')$



आकृति 95

(2) भुजा $KX = 90 - BX$

$= 90 - (X$ का खगोलीय अक्षांश)

$= 90 - \beta$

(3) भुजा $P_NX = 90 - \delta$

(4) कोण $KP_NX = 90 + \Upsilon C$

$= 90 + \alpha$

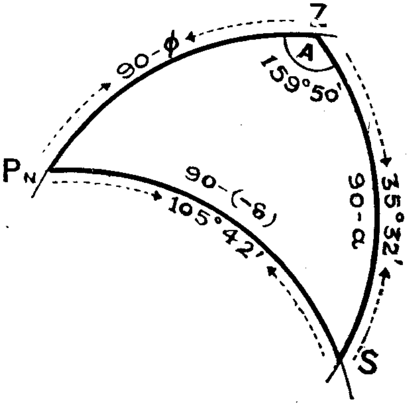
(5) कोण $P_N K X = BM$

$$= \Upsilon C - \Upsilon B$$
$$= 90 - \lambda$$

(6) कोण KXP_N

10·2.5. अनुप्रयोग के विविध उदाहरण

उदाहरण 1. प्रेक्षक का अक्षांश ज्ञात करो जबकि उत्तरी गोलार्ध में सूर्य का उन्नतांश $= 54°28'$, डेक्लिनेशन $= -15°42'$ और दिगंश $= 200°10'$ है।



आकृति 96

मान लो ध्रुव P_N का उन्नतांश ϕ है। धारा (10·2.4) के खगोलीय त्रिभुज में पिंड X के स्थान पर सूर्य का प्रतीक, S, लेने पर त्रिभुज $P_N ZS$ में,

$$SZ = 35°32'$$
$$SP = 90° + 15°42'$$
$$= 105°42'$$

$$\angle P_N ZS = 360° - 200°10' \text{ (सूर्य पश्चिमी आकाश में है)}$$
$$= 159°50'$$

त्रिभुज के निर्धारण से $P_N Z$ मान निकालने के लिए, नैपियर सादृश्यता से,

$$\tan \tfrac{1}{2} ZP_N = \sin \tfrac{1}{2}(P_N ZS + SP_N Z)$$
$$\times \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}(P_N ZS - SP_N Z) \tan \tfrac{1}{2}(SP_N - SZ) \quad \text{(i)}$$

परन्तु (i) का उपयोग करने के लिए $SP_N Z$ का मान ज्ञात करना है। अतः साइन सूत्र से,

$$\sin SP_N Z = \sin P_N ZS \sin SZ \operatorname{cosec} SP_N \qquad \text{(ii)}$$

(ii) के लिए सारणिक लघुगुणक गणना

$$SZ = 35°32', \; L\sin = 9.76431$$

$$SP_N = 105°42', \; L\operatorname{cosec} = 0.01651$$

$$P_N ZS = 159°50', \; \underline{L\sin = 9.53751}$$

$$\therefore \quad SP_N Z = 12°0'48'' \; L\sin = 9.31833$$

(i) के लिए सारणिक लघुगुणक गणना

$$\tfrac{1}{2}(P_N ZS + SP_N Z) = 85°55'24'', \; L\sin = 9.99890$$

$$\tfrac{1}{2}(P_N ZS - SP_N Z) = 73°54'36'', \; L\operatorname{cosec} = 0.01736$$

$$\tfrac{1}{2}(P_N S - SZ) = 35°5', \quad \underline{L\tan = 9.84657}$$

$$\tfrac{1}{2}ZP_N = 36°5'54'' \quad L\tan = 9.86283$$

या,
$$ZP_N = 72°11'48''$$

परन्तु,
$$ZP_N = 90 - \phi$$

$$\therefore \quad \phi = 90 - ZP_N$$

$$= 90 - 72°11'48'' = 17°48'12'' \; (N)$$

उदाहरण 2. किसी खगोलीय पिंड के राइट असेन्शन और डेक्लिनेशन क्रमशः α और δ हैं। पिंड के खगोलीय अक्षांश और रेखांश ज्ञात करो।

क्रिया—मान लो अक्षांश β और रेखांश λ हैं। धारा (10·2.4) के खगोलीय त्रिभुज $P_N KX$ में कोसाइन सूत्र से,

$$\cos(90-\beta) = \cos\epsilon \cos(90-\delta) + \sin\epsilon \times \sin(90-\delta)\cos(90+\alpha)$$

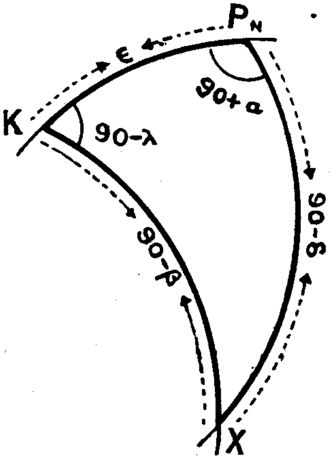
या,
$$\cos\beta = \cos\epsilon \sin\delta - \sin\epsilon \cos\delta \sin\alpha \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

अब इसी त्रिभुज में कोटैन्जेन्ट सूत्र से,

$$\cos \epsilon \cos (90+\alpha) = \sin \epsilon \cot (90-\delta) - \sin (90+\alpha) \cot (90-\lambda)$$

या,
$$-\cos \epsilon \sin \alpha = \sin \epsilon \tan \delta - \cos \epsilon \tan \lambda$$

$$\therefore \quad \tan \lambda = \frac{\sin \epsilon \tan \delta + \cos \epsilon \sin \alpha}{\cos \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$



आकृति 97

(i) और (ii) में हमें α, δ और ϵ के मान मालूम हैं। अतः β और λ के मान ज्ञात किये जा सकते हैं।

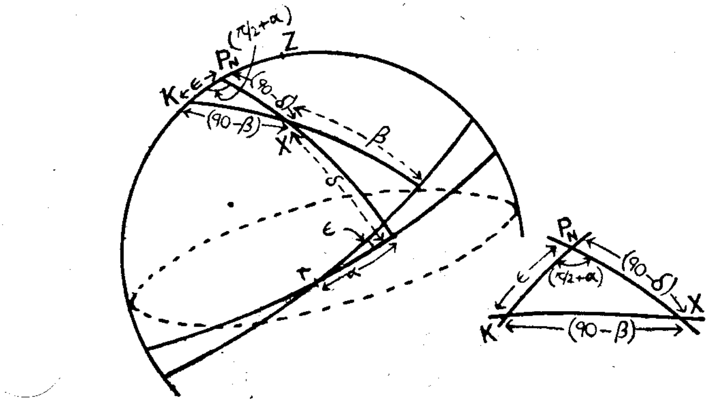
इसी प्रकार यदि किसी गोलीय पिंड के खगोलीय अक्षांश और रेखांश ज्ञात हों तो उसके राइट-असेन्शन और डेक्लिनेशन ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 3. एक खगोलज्ञ, किसी खगोलीय पिंड के होरा कोण H की गणना, प्रेक्षण द्वारा प्राप्त पिंड की शिरोबिन्दु दूरी, Z, प्रेक्षण के अक्षांश ϕ और पिंड के दिगंश, A, से करता है। यदि Z और ϕ के प्रेक्षण में क्रमशः $\triangle Z$ और $\Delta\phi$ अशुद्धियाँ हैं तो सिद्ध करो कि गणना द्वारा प्राप्त H के मान में,

$$\Delta H = \cot A \sec \phi \, \Delta\phi + \sec \phi \operatorname{cosec} A . \Delta Z$$

अशुद्धि होगी।

क्रिया—मान लो खगोलीय पिंड X है। आकृति में दर्शाये अनुसार त्रिभुज $P_N ZX$ में कोसाइन सूत्र से,



आकृति 98

$$\cos Z = \cos(90-\phi)\cos(90-\delta)+\sin(90-\phi)\sin(90-\delta)\cos H$$

$$= \sin\phi\sin\delta+\cos\phi\cos\delta\cos H$$

चूंकि δ के प्रेक्षण में कोई अशुद्धि नहीं है इसलिए यह अचर है। आंशिक अवकलन से,

$$-\sin Z\,\Delta Z = \cos\phi\,\Delta\phi - \sin\phi\,\Delta\phi\cos\delta\cos H - \cos\phi\cos\delta\sin H\,\Delta H$$

$$\therefore \quad \cos\phi\cos\delta\sin H\,\Delta H = (\cos\phi\sin\delta - \sin\phi\cos\delta\cos H)\,\Delta\phi + \sin Z\,\Delta Z.$$

साइन-कोसाइन सूत्र से कोष्ठक का मान रखने पर,

$$\cos\phi\cos\delta\sin H\,\Delta H = \sin Z\cos A\,\Delta\phi + \sin Z\,\Delta Z$$

$$\therefore \quad \Delta H = \frac{\sin Z\cos A\,\Delta\phi}{\cos\phi\cos\delta\sin H} + \frac{\sin Z}{\cos\phi\cos\delta\sin H}\,\Delta Z$$

साइन सूत्र से,

$$\frac{\sin Z}{\sin H}=\frac{\sin(90-\delta)}{\sin A}=\frac{\cos\delta}{\sin A}$$

मान रखने पर,

$$\Delta H=\sec\phi\,\cot A+\sec\phi\,\operatorname{cosec} A\,\Delta Z$$

उदाहरण 4. किसी खगोलीय पिंड की शिरोबिन्दु दूरी Z, अपवर्तन (Refraction) के कारण, $K\tan Z$ कम हो जाती है (जबकि ϕ और A अचर बने रहते हैं)। सिद्ध करो कि अपवर्तन के कारण पिंड के डेक्लिनेशन में

$\Delta\delta=K\tan Z\cos\eta$, परिवर्तन होगा।

यहाँ $\angle\eta$, दिग्भेद कोण दर्शाता है।

क्रियाः—दिया है—$\Delta Z=-K\tan Z$, $\because$ Z कम होता है, और ϕ तथा A अचर हैं।

उदाहरण 3 की आकृति (98) में, कोसाइन सूत्र से,

$$\cos(90-\delta)=\cos(90-\phi)\cos Z=\sin(90-\phi)\sin Z\cos A$$

या, $$\sin\delta=\cos Z\sin\phi+\cos\phi\sin Z\cos A$$

ϕ तथा A को अचर मान कर आंशिक अवकलन से,

$$\begin{aligned}\cos\delta\,\Delta\delta&=-\sin Z\,\Delta Z\sin\phi+\cos Z\,\Delta Z\cos\phi\cos A\\&=-(\sin Z\sin\phi-\cos Z\cos\phi\cos A)\,\Delta Z\\&=-(\sin Z\sin\phi-\cos Z\cos\phi\cos A)\,\Delta Z\end{aligned}$$

साइन कोसाइन सूत्र से कोष्ठक का मान और (i) से ΔZ का मान रखने पर,

$$\begin{aligned}\cos\delta\,\Delta\delta&=K\tan Z\sin(90-\delta)\cos\eta\\&=K\tan Z\cos\delta\cos\eta\end{aligned}$$

$$\therefore\quad\Delta\delta=K\tan Z\cos\eta$$

उदाहरण 5. सिद्ध करो कि किसी खगोलीय पिंड के डेक्लिनेशन में विषुव-अयन (Precession of Equinoxes) प्रभाव के कारण,

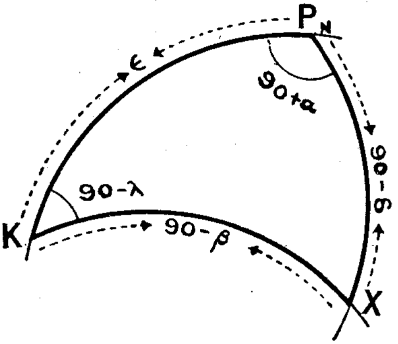
$$\Delta\delta=\sin\epsilon\cos\alpha\,\Delta\lambda;$$

लघु विचरण होता है। यहाँ $\Delta\lambda$, पिंड के खगोलीय रेखांश में वार्षिक लघु विचरण दर्शाता है।

टिप्पणी—खगोलज्ञ हिप्पारकस (देखो धारा 4·1 भी) के शोध परिणाम से ज्ञात हुआ कि मेषादि, ♈, क्रांति वृत्त पर एक समान गति मे पीछे की ओर हटता रहता है। बसन्त विषुव (मेषादि ♈) की इस गति को विषुव-अयन (Precession of Equinoxes) कहते हैं। अयन के कारण विषुव, ♈ क्रान्ति वृत्त पर पीछे की ओर गति करता है जिसके परिणामस्वरूप ध्रुव P_N बिन्दु K (क्रान्ति-वृत्त का ध्रुव) के चारों ओर लघु वृत्त में गति करता है जिसकी त्रिज्या $KP_N = \epsilon$ है जो लगभग अचर रहती है। अयन के कारण खगोलीय पिंडों से रेखांशों में एक समान गति से वृद्धि होती रहती है जबकि खगोलीय अक्षांश अचर बने रहते हैं।

क्रिया—खगोलीय त्रिभुज KP_NX में, कोसाइन सूत्र से

$$\cos(90-\delta) = \cos\epsilon\cos(90-\beta) + \sin\epsilon\sin(90-\beta)\cos(90-\lambda)$$



आकृति 99

या, $$\sin\delta = \cos\epsilon\sin\beta + \sin\epsilon\cos\beta\sin\lambda \qquad (i)$$

β और ϵ को अचर मानकर, आंशिक अवकलन करने से,

$$\cos\delta\,\Delta\delta = \sin\epsilon\cos\beta\cos\lambda\,\Delta\lambda$$

$$\therefore \quad \Delta\delta = \frac{\sin\epsilon\cos\beta\cos\lambda\,\Delta\lambda}{\cos\delta} \quad . \quad . \quad . \quad (ii)$$

त्रिभुज KP_NX में, साइन सूत्र से,

$$\frac{\sin (90-\lambda)}{\sin (90-\delta)}=\frac{\sin (90+\alpha)}{\sin (90-\beta)}$$

$$\therefore \qquad \frac{\cos \lambda \cos \beta}{\cos \delta}=\cos \alpha \qquad . \quad . \quad . \quad \text{(iii)}$$

(ii) और (iii) से,

$$\Delta\delta=\sin \epsilon \cos \alpha \ \Delta\lambda$$

प्रश्न संग्रह 15

1 यदि एक खगोलीय पिंड का डेक्लिनेशन +7°24′, होरा कोण 48°51′ और प्रेक्षक का अक्षांश 64°9′ ($\mathcal{N}$) है तो पिंड का दिगंश ज्ञात करो।

2. उत्तरी गोलार्ध में स्थित एक प्रेक्षक का अक्षांश ज्ञात करो जबकि स्थानीय दृष्ट समय (Local Apparent time) 3 P. M. बजे सूर्य का उन्नतांश 24° 42′ और डेक्लिनेशन 12°8′ है।

3. सिद्ध करो कि सूर्य के राइट असेन्शन (α) और डेक्लिनेशन (δ) में सदैव निम्नलिखित सम्बन्ध होता है

$$\tan \delta=\tan \epsilon \sin \alpha,$$

जहाँ ϵ क्रान्ति वृत्त की तिर्यकता दर्शाता है।

4. एक खगोलीय पिंड जब याम्योतर पर है तब उसकी शिरोबिन्दु दूरी $\mathcal{Z}_1$ है और जब वह प्रमुख उर्ध्वाधर वृत्त पर पहुँचता है तो वही दूरी $\mathcal{Z}_2$ हो जाती है। सिद्ध करो कि

$$\cot \delta=\operatorname{cosec} \mathcal{Z}_1 \sec \mathcal{Z}_2 \cot \mathcal{Z}_1$$

और,

$$\cot \phi=\cot \mathcal{Z}_1-\operatorname{cosec} \mathcal{Z}_1 \cos \mathcal{Z}_2$$

जबकि δ पिंड का डेक्लिनेशन और ϕ प्रेक्षक का अक्षांश दर्शाता है।

5. ϕ अक्षांश वाले स्थान पर जब सूर्य प्रमुख उर्ध्वाधर वृत्त पर पहुँचता है उस समय उसका उन्नतांश a है। यदि सूर्य का खगोलीय रेखांश L है तो सिद्ध करो कि

$$\phi=\sin^{-1} (\sin L \sin \epsilon \operatorname{cosec} a)$$

6. खगोलीय पिंड X के खगोलीय त्रिभुज $P_N\ Z X$ में यदि ϕ और δ अचर हैं तो सिद्ध करो कि A (दिगंश) और H (होरा कोण) के लघु विचरणों में निम्नलिखित सम्बन्ध होता है

$$\Delta A = -(\sin\phi - \cot Z \cos A)\ \Delta H$$

7. जब प्रेक्षक अपने अक्षांश में $\Delta\phi$ की वृद्धि करता है तो पिंड के होरा कोण (H) में ΔH की वृद्धि होती है। सिद्ध करो कि पिंड के उन्नतांश (a) में

$$\Delta a = -\cos A\ \Delta\phi + \sin A \cos\phi\ \Delta H$$

परिवर्तन होता है। यहाँ A, पिंड का दिगंश दर्शाता है।

8. धारा (10·2.4) के खगोलीय त्रिभुज $P_N\ Z X$ में ϕ और δ अचर हैं तो सिद्ध करो कि

(i) $\Delta\eta = -\cos\phi \cos A \operatorname{cosec} Z\ \Delta H$

(ii) $\Delta A = -(\sin\phi - \cot Z \cos A)\ \Delta H$

9. सिद्ध करो कि किसी खगोलीय पिंड के राइट-असेन्शन (α) में विषुव-अयन के प्रभाव के कारण

$$\Delta\alpha = (\cos\epsilon + \sin\epsilon \sin\alpha \tan\delta)\ \Delta\lambda$$

लघु विचरण होता है। यहाँ ϵ, क्रान्ति वृत्त की तिर्यकता दर्शाता है और δ, λ और $\Delta\lambda$ क्रमशः डेक्लिनेशन, खगोलीय रेखांश तथा रेखांश में लघु विचरण दर्शाते हैं।

10. यदि अपवर्तन के परिणामस्वरूप किसी पिंड की शिरोबिन्दु दूरी (Z) में $K \tan Z$ के बराबर ऋणात्मक लघु विचरण होता है जब कि ϕ और A अचर रहते हैं तो सिद्ध करो कि

(अ) $\Delta H = -K \tan Z \sin\eta \sec\delta$

(ब) $\Delta\eta = K \tan Z \tan\delta \sin\eta$

उत्तर

1. 234°36′.
2. 37°22′ (N).

अनुक्रमणिका

Adjacent	आसन्न
Altitude	उन्नतांश
Altitude of a Spherical Triangle	गोलीय त्रिभुज का शीर्ष लम्ब
Ambiguous	संदिग्ध
Analogy	सादृश्यता
Angle of Intersection	प्रतिच्छेदन कोण
Angular Distance	कोणीय दूरी
Anti-clock-wise	वामावर्त (बामावर्त)
Anti-podal point	प्रतिव्यासांतिक बिन्दु
Anti-podal triangle	प्रतिव्यासांतिक त्रिभुज
Applications	अनुप्रयोग
Arbitrary point	स्वेच्छ बिन्दु
Arc	चाप
Arithmetical progression	समांतर श्रेणी
Associated Triangles	सहचारी त्रिभुज
Astronomy	खगोल-विज्ञान । खगोल-शास्त्र । खगोलिकी
Astronomical Latitude	खगोलीय अक्षांश
Astronomical Longitude	खगोलीय रेखांश
Astronomical Observatory	खगोलीय वेधशाला
Automnal Equinox	बसन्त मेषादि (σ)
Axis	अक्ष
Axis of Revolution	घूर्णन अक्ष । परिक्रमण अक्ष
Bisect	समद्विभाग करना
Bisector	समद्विभाजक । अर्धक
Cagnoli	कागनॉली [इटली का विद्वान खगोलज्ञ (1743-1816)]

Celestial Equator	खगोलीय निरक्ष
Celestial Meridian	खगोलीय याम्योत्तर
Celestial Poles	खगोलीय ध्रुव
Celestial Sphere	खगोलीय गोला
Chord	जीवा
Circumscribed circle	परिगत वृत्त
Clock-wise	दक्षिणावर्त
Column	स्तम्भ
Co-lunar	सह-इंदुक
Co-lunar triangles	सह-इंदुक त्रिभुज
Combination	संचय
Componendo and Dividendo	योगान्तरानुपात
Concurrent	संगामी
Concurrence (point of)	संगमन (बिन्दु)
Consecutive	क्रमागत
Coordinates	निर्देशांक
Coordinate Axis	निर्देशांक-अक्ष । निर्देशाक्ष
Cosine	कोसाइन । कोटिज्या
Co-tangent	कोटैन्जेन्ट । कोटि-स्पर्शज्या
Course	मार्ग दिशा
Declination	अपक्रम । डेक्लीनेशन
Delambre	दलाम्ब्र [फ्रेंच गणितज्ञ और खगोलज्ञ (1749-1822)]
Dervie	निगमन करना
Diagonal	विकर्ण
Dihedral Angle	द्वितल कोण
Ecliptic	क्रान्ति-वृत्त
Edge	कोर
Elements	अवयव
Escribed circle	बहिर्वृत्त
External Bisector	बाह्य अर्धक

Faces	फलक
Finite	परिमित
First point of Aries	मेषादि
Fitted	अन्वायुक्त
Fundamental Formula	मूल सूत्र
General result	व्यापक परिणाम
Geographical Meridian	भूयाम्योत्तर
Great Circle	दीर्घ वृत्त । बृहत् वृत्त
Great circle sailing	दीर्घ वृत्त नौयात्रा
Hipparchurs (Great Astronomer)	हिप्पारकस [ग्रीक खगोलज्ञ (150 B.C.)]
Hour Angle	होरा कोण
Hour Circle	होरा वृत्त
Identically equal	सर्वथा सम
Incentre	अन्तः केन्द्र
Inclined plane	नततल
Infinity	अनन्त
Inscribed circle	अन्तर्गत वृत्त
Internal bisector	आन्तरिक अर्धक
Intersecting Arcs	प्रतिच्छेदी चाप
Intersecting curves	प्रतिच्छेदी वक्र
Intersecting lines	प्रतिच्छेदी रेखाएँ
Intersecting planes	प्रतिच्छेदी समतल
Intersection	छेदन । प्रतिच्छेद
Latitude	अक्षांश
L'Huilier	ल्विलियेर [स्विट्जरलैन्ड का विद्वान खगोलज्ञ (1750-1810)]
Limit	सीमा
Limiting	सीमान्त
Line of greatest slope	महत्तम-ढाल-रेखा
Line of Intersection	प्रतिच्छेद रेखा

Longitude	रेखांश
Lune	इंदुक
Nadir	अधो-बिन्दु
Napier	नेपियर [स्कोट्लैंड निवासी विद्वान गणितज्ञ और खगोलज्ञ जिसने लघुगुणक को जन्म दिया। (1550-1617)]
Napier rule of circular parts	नेपियर वृत्तीय अवयव नियम
Navigation	नौसंचालन
Norm	मानक
Oblique spherical triangle	तिर्यक गोलीय त्रिभुज
Observer	प्रेक्षक
Observer's Horizon	प्रेक्षक का क्षितिज
Observer's Meridian	प्रेक्षक का याम्योत्तर
Parallel sailing	समान्तर नौयात्रा
Partial differentiation	आंशिक अवकलन
Plane angle	समतलीय कोण
Plane section	समतल । समतल परिच्छेद
Plane triangle	समतल । त्रिभुज
Plane trigonometry	सरल त्रिकोणमिति
Polar	ध्रुवीय
Polar triangle	ध्रुवीय त्रिभुज
Pole	ध्रुव
Precession of Equinoxes	विषुव-अयन
Primary circle	प्रधान वृत्त । मूल वृत्त
Prime Vertical	प्रधान याम्योत्तर
Primitive triangle	आधारी त्रिभुज
Principal of Duality of theorems	द्वैत-प्रमेय-सिद्धान्त
Quadrant	चतुर्थांश
Quadrantal triangle	चतुर्थांश त्रिभुज

Random	यादृच्छिक
Row	पंक्ति
Refraction	अपवर्तन
Schematic Diagram	व्यवस्था चित्र
Secondary circles	द्वितीयक वृत्त
Sequence	अनुक्रम
Similar triangles	समरूप त्रिभुज
Sine	साइन । ज्या
Skew	विषम तलीय
Small circle	लघु वृत्त
Small Variation	लघु विचरण
Solid Angle	ठोस कोण
Solid Geometry	ठोस ज्यामिति
Solution of Triangles	त्रिभुजों का निर्धारण
Space	समष्टि । आकाश । अंतरिक्ष
Sphere	गोला
Spherical Angle	गोलीय कोण
Spherical Distance	गोलीय दूरी
Excess	आधिक्य
Geometry	ज्यामिति
Sector	त्रिज्य-खंड
Segment	खंड
shell	कोश
surface	पृष्ठ
Triangle	त्रिभुज
Trigonometry	त्रिकोणमिति
Superposed	अध्यारोपित
Supplementary	सम्पूरक
Supplemental cosine Formula	सम्पूरक कोसाइन सूत्र
Supplementary triangles	सम्पूरक त्रिभुज
Surface of revolution	परिक्रमण पृष्ठ

Symmetrical	सममित
Symmetrical Function	सममित फलन
Symmetrically Equal	सममितत: बराबर
Tabular Logarithms	सारणिक लघुगुणक
Terrestrial Equator	भूमध्यरेखा। निरक्ष
Trihedral Angle	त्रितल कोण
Vertex	शीर्ष
Vertical circle	उर्ध्वाधर वृत्त
Zenith	शिरो बिन्दु